OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2017.03.28 **MATH115 Basic Mathematics – Midterm Exam** N. Course

Forename: Ö R N E K T İ R

Surname: S A M P L E

Student No:

Signature:

Time Allowed: **60** min.

Answer **2** questions.

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have **60** minutes to answer **2** questions from a choice of 3. If you choose to answer more than 2 questions, then only your best 2 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You must answer in English.
4. You must show your working for all questions.
5. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
6. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
7. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
8. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam **60** dakikadır. Sınavda 3 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **2** tanesini seçerek cevaplayınız. 2'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 2 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce veriniz.
4. Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
5. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
6. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
7. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
8. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	Total
/50	/50	/50	/100

Question 1 (Limits and Continuity)

(a)-(b) Calculate the following limits.

(a) [16 pts] $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3h+1}-1}{h}=$

[HINT: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.]

Using the hint, we have that

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3h+1}-1}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{3h+1}-1)(\sqrt{3h+1}+1)}{h(\sqrt{3h+1}+1)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3h+1-1}{h(\sqrt{3h+1}+1)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h(\sqrt{3h+1}+1)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}\\&=\frac{3}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(b) [16 pts] $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}=$

We can calculate that

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}&=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2-2x^{-2}+3x^{-3}}{3+3x^{-1}-5x^{-2}}\\&=\frac{-2+0+0}{3+0+0}\\&=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(c) [18 pts] Consider the function $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ \lambda & x=3.\end{cases}$$

For which value(s) of λ is g a continuous function?

Clearly g is continuous if $x\neq 3$ because it is a rational function.

Since

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}g(x)&=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to 3}(x+3)=6,\end{aligned}$$

we can see that g is a continuous function if and only if $\lambda=6$.

Question 2 (Differentiation and Extreme Values of Functions)

(a) [10 pts] Find $\dfrac{dy}{dx}$ if $y = x^2 \sin^4 x + x \cos 2x$.

Using the chain and product rules, we can calculate that

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin^4 x + x \cos 2x\right) \\
&= (x^2)' \sin^4 x + x^2 \big(\sin^4 x\big)' \\
&\qquad + (x)' \cos 2x + x(\cos 2x)' \\
&= 2x \sin^4 x + 4x^2 \sin^3 x \cos x + \cos 2x - 2x \sin x.
\end{aligned}$$

(b) [20 pts] Find $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ if $f(t) = \left(\dfrac{\sin t}{1+\cos t}\right)^2$.

Using the quotient and chain rules, we calculate that

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)^2 \\
&= 2\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right) \\
&= 2\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)\frac{\cos t(1+\cos t) - \sin t(0-\sin t)}{(1+\cos t)^2} \\
&= 2\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)\frac{\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}{(1+\cos t)^2} \\
&= 2\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)\frac{\cos t + 1}{(1+\cos t)^2} \\
&= \frac{2\sin t}{(1+\cos t)^2}.
\end{aligned}$$

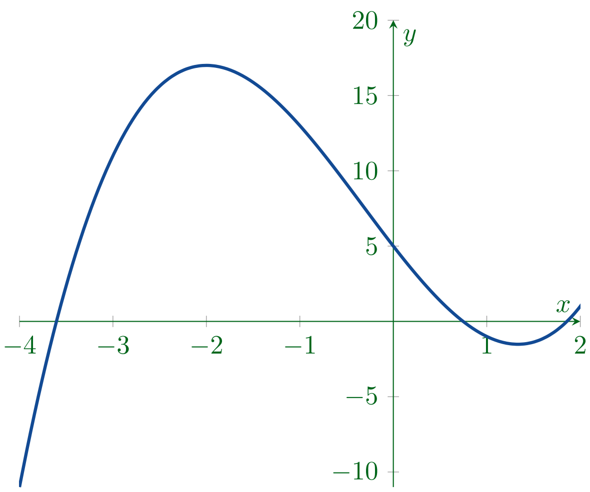
Therefore $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{(1+\cos\frac{\pi}{2})^2} = \frac{2}{(1+0)^2} = 2$.

Define a function $h : [-4, 2] \to \mathbb{R}$ by $h(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5$.

(c) [5 pts] Find all the critical points of h.

Clearly h is differentiable everywhere because h is a polynomial. Solving $0 = h'(x) = 3x^2 + 2x - 8$ gives $x = -2$ or $x = \frac{4}{3}$. The critical points of h are -2 and $\frac{4}{3}$.

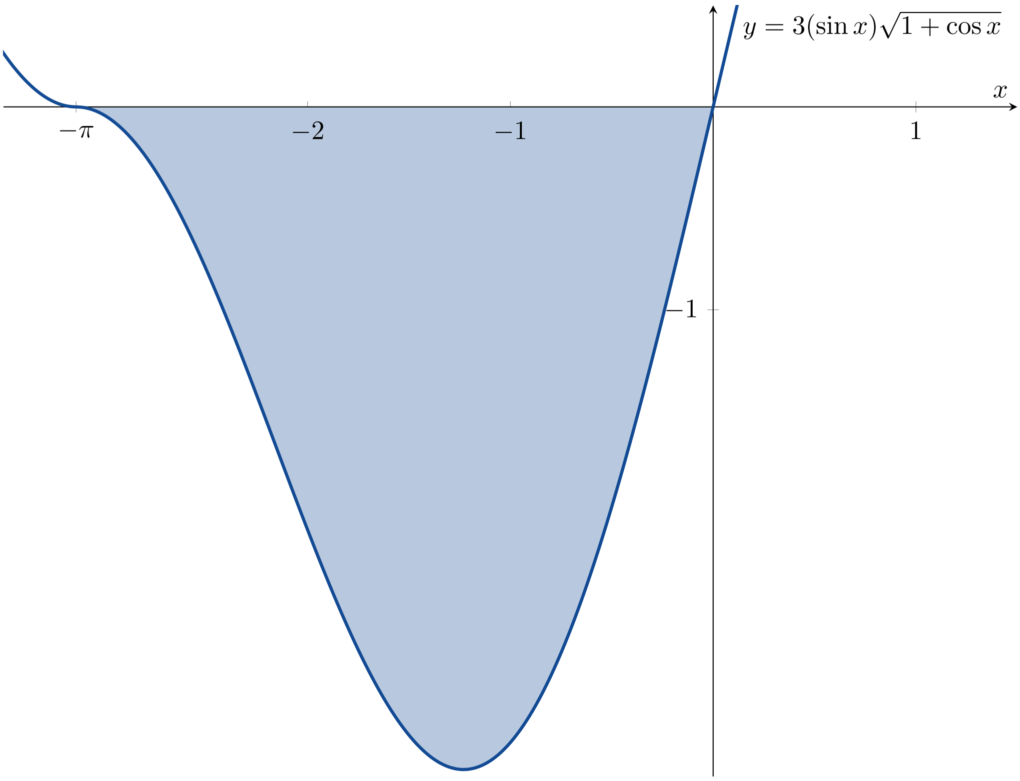
(d) [15 pts] Find the absolute maximum value and absolute minimum value of h on $[-4, 2]$.



We calculate

$$\begin{aligned}
h(-4) &= (-4)^3 + (-4)^2 - 8(-4) + 5 \\
&= -64 + 16 + 32 + 5 = -11, \\
h(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 - 8(-2) + 5 \\
&= -8 + 4 + 16 + 5 = 17, \\
h\left(\frac{4}{3}\right) &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{3}\right) + 5 \\
&= \frac{64}{27} + \frac{16}{9} - \frac{32}{3} + 5 \\
&= \frac{64}{27} + \frac{48}{27} - \frac{288}{27} + \frac{135}{27} = -\frac{41}{27}, \\
h(2) &= 2^3 + 2^2 - 8(2) + 5 = 8 + 4 - 16 + 5 = 1.
\end{aligned}$$

Therefore, the absolute minimum value of h on $[-4, 2]$ is -11 and the absolute maximum value of h on $[-4, 2]$ is 17.



Question 3 (Integration) [50 pts] Find the total area between $y = 3(\sin x)\sqrt{1+\cos x}$ and the x-axis for $-\pi \le x \le 0$.

First we will calculate $\int_{-\pi}^{0} 3(\sin x)\sqrt{1+\cos x}\ dx$. Let $u = 1+\cos x$. Then $du = -\sin x\ dx$. Moreover $x = -\pi \implies u = 1+\cos -\pi = 1-1 = 0$ and $x = 0 \implies u = 1+\cos 0 = 1+1 = 2$. So

$$\int_{-\pi}^{0} 3(\sin x)\sqrt{1+\cos x}\ dx = \int_{0}^{2} -3\sqrt{u}\ du = -\int_{0}^{2} 3u^{\frac{1}{2}}\ du = -\left[2u^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2} = -2\times 2^{\frac{3}{2}} + 0 = -4\sqrt{2}.$$

Therefore the total area required is

$$\text{area} = \left|-4\sqrt{2}\right| = 4\sqrt{2}.$$