



OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2017.10.31

MATH115 Basic Mathematics – Midterm Exam

N. Course

FORENAME:

SURNAME:

STUDENT NO:

SIGNATURE:

Time Allowed: **60** min.

Answer **2** questions.



**Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.**



1. You will have **60** minutes to answer **2** questions from a choice of 3. If you choose to answer more than 2 questions, then only your best 2 answers will be counted.
 2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
 3. All of the questions are in English. You must answer in English.
 4. You must show your working for all questions.
 5. This exam contains 4 pages. Check to see if any pages are missing.
 6. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
 7. Switch your mobile phone off and seal it in the envelope provided. Do not open your envelope until the exam is finished or you have left the room.
 8. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
 9. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
 10. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.
1. Sınav süresi toplam **60** dakikadır. Sınavda 3 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **2** tanesini seçerek cevaplayınız. 2'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 2 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
 2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
 3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce veriniz.
 4. Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
 5. Sınav 4 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
 6. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmamız yasaktır.
 7. Cep telefonunuzu kapatınız ve size verilen zarfın içine koyunuz. Zarfı, sınav süresi bitene kadar ya da sınav salonundan çıkana kadar açmayınız.
 8. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
 9. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
 10. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	TOTAL
50	50	50	100

Question 1 (Differentiation)

- (a) [5 pts] Find y' and y'' if $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$.

An easy one to start with. We have that

$$y' = 12x - 10 + 10x^{-3}$$

and

$$y'' = 12 - 30x^{-4}.$$

- (b) [10 pts] Use the quotient rule to show that

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

By the quotient rule,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cot x &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(\cos x)' \sin x - (\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} \\ &= -\operatorname{cosec}^2 x. \end{aligned}$$

- (c) [15 pts] Find $f'(t)$ if $f(t) = \cot(t \sin t)$.

Let $u = t \sin t$. By the Chain Rule and the product rule, we have that

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} (\cot u) \\ &= \frac{d}{du} (\cot u) \frac{du}{dt} \\ &= (-\operatorname{cosec}^2 u) (\sin t + t \cos t) \\ &= -\operatorname{cosec}^2 (t \sin t) (\sin t + t \cos t). \end{aligned}$$

- (d) [20 pts] Find all the critical points of $g(x) = x(4-x)^3$.

Solving

$$\begin{aligned} 0 &= g'(x) \\ &= (x)'(4-x)^3 + x((4-x)^3)' \\ &= (4-x)^3 + x(3(-1)(4-x)^2) \\ &= (4-x)^3 - 3x(4-x)^2 \\ &= (4-x)^2(4-x-3x) \\ &= 4(4-x)^2(1-x) \end{aligned}$$

gives $x = 1$ or $x = 4$.

The critical points of g are $x = 1$ and $x = 4$.

Question 2 (Limits and Continuity)

(a)-(c) Calculate the following limits, or explain why they do not exist.

(a) [5 pts] $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2)$.

An easy one to start with.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2) = -2^2 + 5(2) - 2 = -4 + 10 - 2 = 4.$$

(b) [10 pts] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$.

This limit does not exist. If x is close to 1, but $x < 1$ (e.g. $x = 0.99$), then $\frac{x}{x^2 - 1}$ is a large negative number. However, if x is close to 1, but $x > 1$ (e.g. $x = 1.01$), then $\frac{x}{x^2 - 1}$ is a large positive number.

(c) [15 pts] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

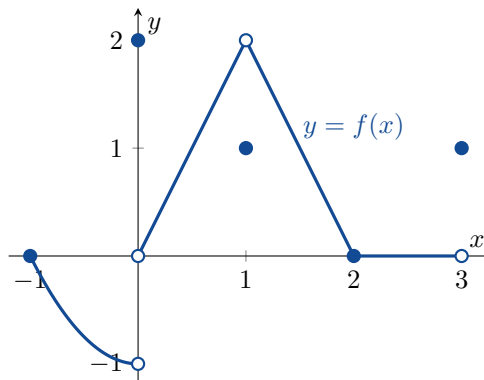
We have that

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{-2}}{1 + 2x^{-1} + x^{-2}}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + 0}{1 + 0 + 0}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

or that

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + x^{-2})}}{x(1 + x^{-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{1 + x^{-2}}}{x(1 + x^{-2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + x^{-2}}}{1 + x^{-2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 0}}{1 + 0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(d) [20 pts] Consider the function $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ with graph shown below. Where is f continuous? Where is f discontinuous?



f is continuous on $[-1, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, 3)$. f is discontinuous at $x = 0$, $x = 1$ and $x = 3$.

Question 3 (Integration)

- (a) [5 pts] Find
- $\int (2x^3 - 5x - 7) dx$
- .

Once again, I give you an easy problem to start with. We have that

$$\int (2x^3 - 5x - 7) dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 - 7x + C.$$

- (b) [20 pts] Calculate
- $\int_{\sqrt{2}}^1 \left(\frac{z^7}{2} - \frac{1}{z^5} \right) dz$
- .

We calculate that

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^1 \left(\frac{z^7}{2} - \frac{1}{z^5} \right) dz &= \left[\frac{z^8}{16} + \frac{1}{4z^4} \right]_{\sqrt{2}}^1 \\ &= \left(\frac{1^8}{16} + \frac{1}{4 \times 1^4} \right) - \left(\frac{(\sqrt{2})^8}{16} + \frac{1}{4(\sqrt{2})^4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{16}{16} + \frac{1}{16} \right) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} - \frac{16}{16} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

- (c) [25 pts] Calculate
- $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2\theta}{\cos^3 2\theta} d\theta$
- .

Let $u = \cos 2\theta$. Then $du = \frac{du}{d\theta} d\theta = -2 \sin 2\theta$. Moreover

$$\theta = \frac{\pi}{6} \implies u = \cos 2\theta = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 0 \implies u = \cos 2\theta = \cos 0 = 1.$$

Hence

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2\theta}{\cos^3 2\theta} d\theta &= \int_{u=1}^{u=\frac{1}{2}} -\frac{1}{2}u^{-3} du \\ &= \left[\frac{1}{4}u^{-2} \right]_{u=1}^{u=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} - \frac{1}{4}(1)^{-2} \\ &= \frac{1}{4}(2)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$