Adı:

Soyadı:

Öğrenci No:

Bölüm:

Öğr. Üyesi: ☐ Neil Course ☐ Vasfı Eldem ☑ Asuman Özer ☐ Sezgin Sezer

İmza:

Soru	Puan	Puanınız
1	20	
2	30	
3	30	
4	20	
Toplam	100	

- Sınav süresi 90 dakika.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Sınav esnasında öğrenciler arasında, sözlü ya da sözsüz, her türlü iletişim kesinlikle yasaktır.
- Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu, akıllı saat ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- $\boxed{\text{Cevabınızı kutu}}$ içine alınız.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{1}{x+g(x)} = 2$ olsun. $x \to \sqrt{5}$ iken $g(x)$' in limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{1}{x+g(x)} = \frac{\lim_{x\to\sqrt{5}} 1}{\lim_{x\to\sqrt{5}} x + \lim_{x\to\sqrt{5}} g(x)} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5} + \lim_{x\to\sqrt{5}} g(x)} = 2 \Rightarrow = \frac{1}{2} - \sqrt{5}$$

(b) $\boxed{\text{10 puan}}$ Kendisi ve çarpmaya göre tersinin toplamı minimum (en küçük) olan pozitif sayıyı bulunuz.

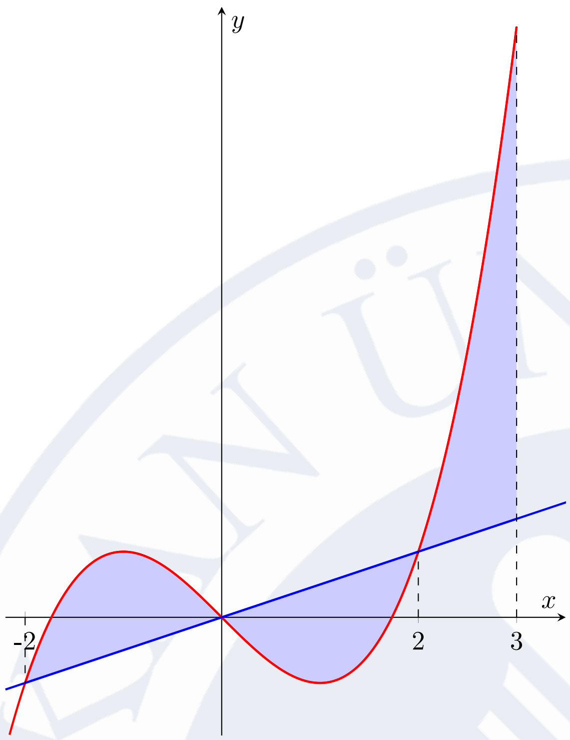
Çözüm: İstenen sayıya x diyelim. O halde onun çarpmaya göre tersi $\frac{1}{x}$ olur.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0$$

Kritik noktalar (critical points): $x=-1$, $x=0$, $x=1$. Sayı pozitif olduğundan $x=1$ istenen sayıdır. Toplam da $f(1)=2$ dir.

2. (a) 15 puan $y = \frac{x^3}{3} - x$ hiperbolü ve $y = \frac{x}{3}$ doğrusu arasındaki bölgenin $-2 \le x \le 3$ aralığındaki toplam alanını bulunuz.



Çözüm:

$$A = \left|\int_{-2}^{0} [(\frac{x^3}{3} - x) - \frac{x}{3}]dx\right| + \left|\int_{0}^{2} [\frac{x}{3} - (\frac{x^3}{3} - x)]dx\right| + \left|\int_{2}^{3} [(\frac{x^3}{3} - x) - x]dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{0} [\frac{x^3}{3} - \frac{4x}{3}]dx\right| + \left|\int_{0}^{2} [\frac{4x}{3} - \frac{x^3}{3}]dx\right| + \left|\int_{2}^{3} [\frac{x^3}{3} - \frac{4x}{3}]dx\right|$$

$$= \left|\frac{x^4}{12} - \frac{2x^2}{3}\right|_{-2}^{0} + \left|\frac{2x^2}{3} - \frac{x^4}{12}\right|_{0}^{2} + \left|\frac{x^4}{12} - \frac{2x^2}{3}\right|_{2}^{3} = |-\frac{4}{3}| + |\frac{4}{3}| + |\frac{51}{3}| = \frac{59}{3}$$

(b) 15 puan $x = 2\sqrt{4-y}$, $0 \le y \le \frac{15}{4}$ eğrisinin $y-$*ekseni* etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{4-y}} \Rightarrow A = \int_{0}^{\frac{15}{4}} 2\pi x\sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}dy = \int_{0}^{\frac{15}{4}} 2\pi(2\sqrt{4-y})\sqrt{1 + \frac{1}{4-y}}dy$$

$$= 4\pi \int_{0}^{\frac{15}{4}} \sqrt{4-y}\frac{5-y}{\sqrt{4-y}}dy = 4\pi \int_{0}^{\frac{15}{4}} (5-y)dy = 4\pi(5y - \frac{y^2}{2})\Big|_{0}^{\frac{15}{4}} = 15\frac{25}{8}\pi = \frac{375}{8}\pi$$

3. $\boxed{\text{30 puan}}$ $y = x$ ve $y = x^2$ ile sınırlanan bölgenin **y-ekseni** etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini aşağıdaki yöntemlerle bulunuz;

(i). kabuk yöntemi

(ii). pul yöntemi.

Çözüm:

(i). **the shell method** Shell radius: x
Shell high: $x - x^2$

$$V = \int_0^1 2\pi x(x - x^2)dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)dx$$
$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \bigg|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

(ii). **the washer method** Outer radius: $R(y) = \sqrt{y}$
İnner radius: $r(y) = y$

$$V = \int_0^1 \pi[(R(y))^2 - (r(y))^2]dy = \pi \int_0^1 [(\sqrt{y})^2 - y^2]dy$$
$$= \pi \int_0^1 [y - y^2]dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

4. $\boxed{\text{20 puan}}$ $y = x^{2/3}(x-5)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz :$y' = \dfrac{5(x-2)}{3x^{\frac{1}{3}}}$, $y'' = \dfrac{10}{9}\dfrac{x+1}{x^{\frac{4}{3}}}$.

Çözüm:

(i). Critical Points: $x = 0$ and $x = 2$.

(ii). Local max: $f(0) = 0$, Local min:$f(2) = -3\sqrt[3]{4}$, inf. point: $f(-1) = -6$

(iii). There is no asymptotes!

x	$-\infty$		-1		0		2		∞
$f'(x)$		$+$		$+$		-		$+$	
$f''(x)$		-		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$