

Your Name / İsim Soyisim

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci Numarası

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Professor's Name / Öğretim Üyesi

- Kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci sınavdan **0 (sıfır)** not almış sayılır.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsiye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi **80 dakika**.

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
Toplam	100	

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

**Elementer Laplace Dönüşümleri:**  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  mevcut ve  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  olarak alalım.

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, s > a$ ,
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$ ,
- $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
- $\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
- $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|$
- $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, s > |a|$
- $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), c > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
- $\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$

1. (a) **20 puan**  $2\frac{dy}{dt} - y = 2t, y(0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R}$  denklemini çözünüz.

**Solution:**  $2\frac{dy}{dt} - y = 2t$  denklemi lineer diferansiyel denklemdir. Denklemın integrasyon çarpanını bulalım.

$$\lambda = e^{\int -\frac{1}{2} dt} = e^{-\frac{t}{2}}$$

Denklemın genel çözümü

$$y(t) = e^{\frac{t}{2}} \int te^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$y(t) = e^{\frac{t}{2}} \left( -2te^{-\frac{t}{2}} + 2 \int e^{-\frac{t}{2}} dt \right)$$

$$y(t) = e^{\frac{t}{2}} \left( -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C \right)$$

$$y(t) = -2t - 4 + Ce^{\frac{t}{2}}$$

olarak bulunur.  $y(0) = y_0$  başlangıç koşulu kullanıldığında  $y(0) = -4 + C = y_0 \Rightarrow C = y_0 + 4$  bulunur. Dolayısıyla,  $y(t) = -2t - 4 + (y_0 + 4)e^{\frac{t}{2}}$ 'dir.

- (b) **5 puan**
- If  $y_0 < a$  then  $y(t) \rightarrow -\infty$  as  $t \rightarrow \infty$ .
  - If  $y_0 > a$  then  $y(t) \rightarrow \infty$  as  $t \rightarrow \infty$ .
- olacak şekildeki  $a \in \mathbb{R}$  sayısını bulunuz.

**Solution:** Eğer  $y_0 + 4 \leq 0$  ise  $t \rightarrow \infty$  iken  $(y_0 + 4)e^{\frac{t}{2}} \rightarrow -\infty$ , dolayısıyla  $y(t) \rightarrow -\infty$ .  
Eğer  $y_0 + 4 > 0$  ise  $t \rightarrow \infty$  iken  $(y_0 + 4)e^{\frac{t}{2}} \rightarrow \infty$ , dolayısıyla  $y(t) \rightarrow \infty$ .

2. (a) 15 puan  $y' = \frac{2x-3y}{3x+5y}$  diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

**Solution: First Way:** Verilen denklemde  $x \rightarrow \lambda x$  ve  $y \rightarrow \lambda y$  alındığında

$$y' = \frac{2\lambda x - 3\lambda y}{3\lambda x + 5\lambda y} = \frac{\lambda(2x-3y)}{\lambda(3x+5y)} = \frac{2x-3y}{3x+5y}$$

olduğundan denklem homojen diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla  $y = vx$  değişken dönüşümü kullanılır.

$$\begin{aligned} y = vx &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v \\ x \frac{dv}{dx} + v &= \frac{2x-3vx}{3x+5vx} = \frac{2-3v}{3+5v} \\ x \frac{dv}{dx} &= \frac{2-3v}{3+5v} - v = \frac{2-3v-3v-5v^2}{3+5v} = \frac{2-6v-5v^2}{3+5v} \\ x \frac{dv}{dx} &= \frac{2-6v-5v^2}{3+5v} \\ \frac{3+5v}{2-6v-5v^2} dv &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{3+5v}{2-6v-5v^2} dv &= \int \frac{dx}{x} \\ -\frac{1}{2} \ln|2-6v-5v^2| &= \ln x + \ln C \\ 2-6v-5v^2 &= \frac{1}{(Cx)^2} \\ 2-6\frac{y}{x}-5\frac{y^2}{x^2} &= \frac{1}{(Cx)^2} \\ 2x^2-6xy-5y^2 &= D, D = \frac{1}{C^2} \end{aligned}$$

**Second Way:** Verilen diferansiyel denklemin  $(3y-2x)dx + (3x+5y)dy = 0$  şeklinde yeniden düzenleyelim.  $M(x,y) = 3y-2x$  ve  $N(x,y) = 3x+5y$  alalım.  $M_y = N_x = 3$  olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir. Buna göre  $F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = 0$  olacak şekilde bir  $F(x,y) = 0$  fonksiyonu vardır. Dolayısıyla

$$F_x = M(x,y) = 3y-2x \Rightarrow F(x,y) = \int (3y-2x)dx \Rightarrow F(x,y) = 3xy - x^2 + h(y)$$

$$F_y = N(x,y) = 3x+5y \Rightarrow F_y = 3x + h'(y) = 3x+5y \Rightarrow h(y) = \frac{5y^2}{2} + C$$

$$F(x,y) = 3xy - x^2 + \frac{5y^2}{2} + C = 0$$

- (b) 10 puan  $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$  diferansiyel denklemini çözünüz.

**Solution:**

$$\begin{aligned} r^2 - 6r + 9 = 0 &\Rightarrow (r-3)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3 \\ y(x) &= c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \end{aligned}$$

Başlangıç değer probleminin çözümü ise

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow y(0) = c_1 = 0 \\ y'(0) = 3 &\Rightarrow y' = 3c_1 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x} + c_2 e^{3x} \Rightarrow y'(0) = 3c_1 + c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 3 \\ y(t) &= 3x e^{3x} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3. 25 puan  $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

**Solution: Birinci Yol:** The eigenvalue and the corresponding eigenvectors of matrix  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$  are obtained by as follows

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda) - 1(-4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow (A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & 1 & | & 0 \\ -4 & -1-1 & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ -4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(A - I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ -4 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 1-2w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} w_1 \Rightarrow w_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The general solution of the given system is

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^t$$

Let us find arbitrary coefficients  $c_1$  and  $c_2$  by using initial value  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 2 \text{ and } c_2 = 3$$

Therefore, the solution of the initial value problem is

$$\mathbf{x}(t) = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t + 3 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^t$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} e^t + \left( \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) e^t$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3t+2 \\ -6t-1 \end{bmatrix} e^t$$

Alternatif olarak denklem sisteminin çözümüne aşağıdaki adımları da takip ederek ulaşabiliriz.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ -2e^t & (-2t+1)e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ -2e^t & (-2t+1)e^t \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi^{-1}(t) = \frac{1}{e^{2t}} \begin{bmatrix} (-2t+1)e^t & -te^t \\ 2e^t & e^t \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ -2e^t & (-2t+1)e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ -2e^t & (-2t+1)e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t+2 \\ -6t-1 \end{bmatrix} e^t$$

**İkinci Yol :** Diferansiyel denklem sistemini Laplace Dönüşümü yardımıyla da çözebiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\mathbf{x}'\} &= \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}\right\} \\ s\mathcal{L}\{\mathbf{x}\} - \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\mathcal{L}\{\mathbf{x}\} \\ \left(sI - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\right)\mathcal{L}\{\mathbf{x}\} &= \mathbf{x}(0) \\ \begin{bmatrix} s-3 & -1 \\ 4 & s+1 \end{bmatrix}\mathcal{L}\{\mathbf{x}\} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}\{\mathbf{x}\} &= \begin{bmatrix} s-3 & -1 \\ 4 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-3)(s+1) - 4(-1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -4 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}\{\mathbf{x}\} &= \frac{1}{s^2 - 2s + 1} \begin{bmatrix} 2(s+1) + 1(-1) \\ (-4)2 + (s-3)(-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1} \begin{bmatrix} 2s+1 \\ -s-5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{2s+1}{(s-1)^2} \\ \frac{-s-5}{(s-1)^2} \end{bmatrix}\right\} \\ \frac{2s+1}{(s-1)^2} &= \frac{2(s-1)+3}{(s-1)^2} = \frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} \\ \frac{-s-5}{(s-1)^2} &= \frac{-(s-1)-6}{(s-1)^2} = -\frac{1}{s-1} - \frac{6}{(s-1)^2} \\ \Rightarrow \mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} \\ -\frac{1}{s-1} - \frac{6}{(s-1)^2} \end{bmatrix}\right\} \\ \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2e^t + 3te^t \\ -e^t - 6te^t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

4. 25 puan  $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

**Solution: Birinci Yol :**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulalım.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 3(-1) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ and } \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ -1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow (A + I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi^{-1}(t) = \frac{1}{-3+1} \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^t & -3e^t \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi^{-1}(0) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-Ax} f(x) dx$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-x} - e^x & 3e^{-x} - 3e^x \\ -e^{-x} + e^x & -e^{-x} + 3e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{bmatrix} dx$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^x - e^{3x} - 3e^x + 3e^{3x} \\ -e^x + e^{3x} + e^x - 3e^{3x} \end{bmatrix} dx$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{3x} \\ -e^{3x} \end{bmatrix} dx$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{3} \\ -\frac{e^{3t}}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{6} \left( \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} - 3e^{4t} + 3e^{2t} \\ -e^{4t} + e^{2t} + e^{4t} - 3e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3e^t + e^{-t} + 3e^t - 3e^{-t} \\ e^t - e^{-t} - e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

**İkinci Yol :** Öncelikle  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  homojen sisteminin genel çözümünü bulalım.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 3(-1) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ and } \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ -1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow (A + I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$\mathbf{x}_p$ 'yi ise Belirsiz Katsayılar Metodunu kullanarak belirleyelim.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p &= \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{2t} \Rightarrow \mathbf{x}'_p = \begin{bmatrix} 2A \\ 2B \end{bmatrix} e^{2t} \\ \mathbf{x}'_p &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} \\ \begin{bmatrix} 2A \\ 2B \end{bmatrix} e^{2t} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 2A+3B+1 \\ -A-2B-1 \end{bmatrix} e^{2t} \\ \Rightarrow \begin{aligned} 2A &= 2A+3B+1 \\ 2B &= -A-2B-1 \end{aligned} &\Rightarrow A = \frac{1}{3}B = -\frac{1}{3} \\ \mathbf{x}_p &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}\end{aligned}$$

Ayrıca  $\mathbf{x}_p$ 'yi belirlemek için parametrelerin değişimi metodu da kullanılabilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p &= \Psi(t) \int \Psi^{-1}(t) \mathbf{f}(t) dt \Rightarrow \begin{bmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi^{-1}(t) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^t & -3e^t \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_p &= \begin{bmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \int -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^t & -3e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} dt \\ \mathbf{x}_p &= \begin{bmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{3t} \end{bmatrix} dt \\ \mathbf{x}_p &= \begin{bmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}e^{3t} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}\end{aligned}$$

Verilen diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$  olarak bulunur.  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerini belirleyebilmek için başlangıç koşulunu kullanalım.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -3c_1 - c_2 + \frac{1}{3} &= 0 \\ c_1 + c_2 - \frac{1}{3} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{3}$$

Başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki gibidir.  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$ . **Üçüncü Yol:** Laplace Dönüşümü kullanarak çözüm.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\mathbf{x}'\} &= \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} \right\} \\ s\mathcal{L}\{\mathbf{x}\} - \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathcal{L}\{\mathbf{x}\} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\ \left( sI - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \right) \mathcal{L}\{\mathbf{x}\} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \mathcal{L}\{\mathbf{x}\} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ \mathcal{L}\{\mathbf{x}\} &= \begin{bmatrix} s-2 & -3 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{(s-2)(s+2)+3} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s^2-1} \begin{bmatrix} s-1 \\ \frac{s-2}{-s+1} \\ s-2 \end{bmatrix} \\ \frac{s-1}{(s-2)(s-1)(s+1)} &= \frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} \\ \frac{-s+1}{(s-2)(s-1)(s+1)} &= -\frac{1}{(s-2)(s+1)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} \\ \mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{1}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \right\} \\ \mathbf{x}(t) &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}\end{aligned}$$