



Your Name / İsim Soyisim

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci Numarası

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci sınavdan **0 (sıfır)** not almış sayılır.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Fazla kağıt ihtiyacınız olursa, boş yerleri kullanabilirsiniz.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- **Sınav süresi 75 dakika.**

Soru	Puan	Puanınız
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	
Toplam	100	

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. 20 puan $t > 0$ olmak üzere $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = 2$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Solution: $ty' + 2y = t^2 - t + 1$ denklemi lineer diferansiyel denklemdir. Denklemi $y' + \frac{2}{t}y = t - 1 + \frac{1}{t}$ şeklinde düzenleyip integrasyon çarpanını bulalım.

$$\lambda(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln t} = t^2$$

Denklemi integrasyon çarpanı ile çarpıp çözelim.

$$\begin{aligned} t^2 y' + 2ty &= t^3 - t^2 + t \\ \frac{d}{dt}(t^2 y) &= t^3 - t^2 + t \\ t^2 y &= \int (t^3 - t^2 + t) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C \\ y(t) &= \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2} \end{aligned}$$

Keyfi sabiti bulmak için başlangıç koşulunu kullanalım.

$$y(1) = 2 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C = 2 \Rightarrow C = \frac{19}{12}$$

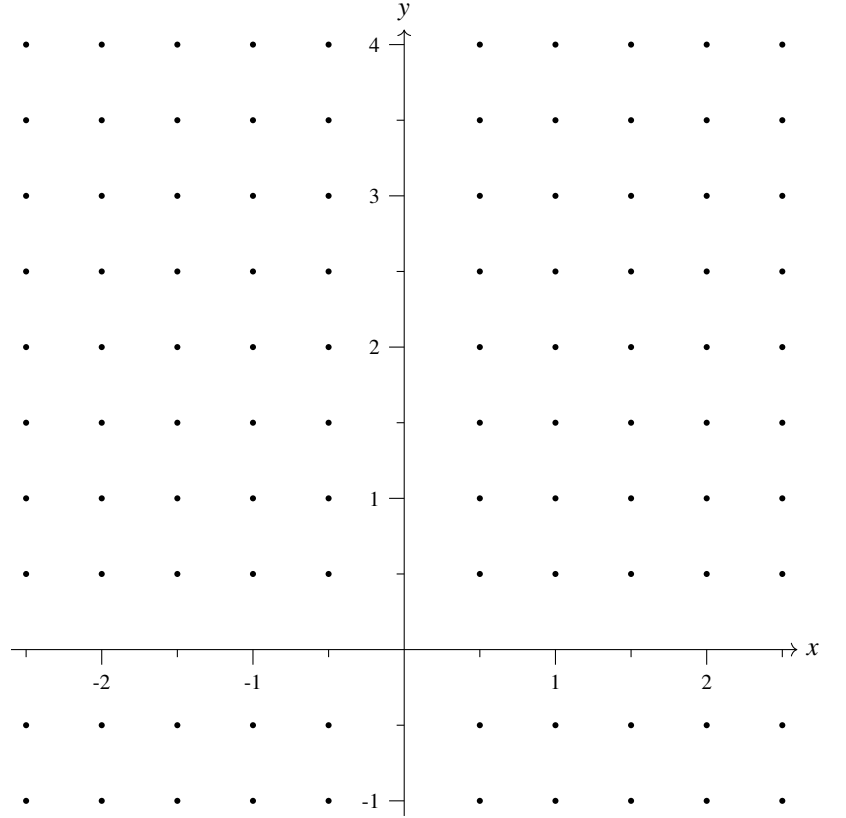
Denklemin genel çözümü $y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{19}{12t^2}$ şeklindedir.

2. (a) 5 puan Aşağıda verilen diferansiyel denklemi mertebesini, lineerlik ve homojenlik özelliklerini belirterek sınıflandırınız.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2e^x \frac{d^2y}{dx^2} = x^3 + 5xy.$$

Solution: Verilen denklem üçüncü mertebeden, lineer, homojen olmayan diferansiyel denklemdir.

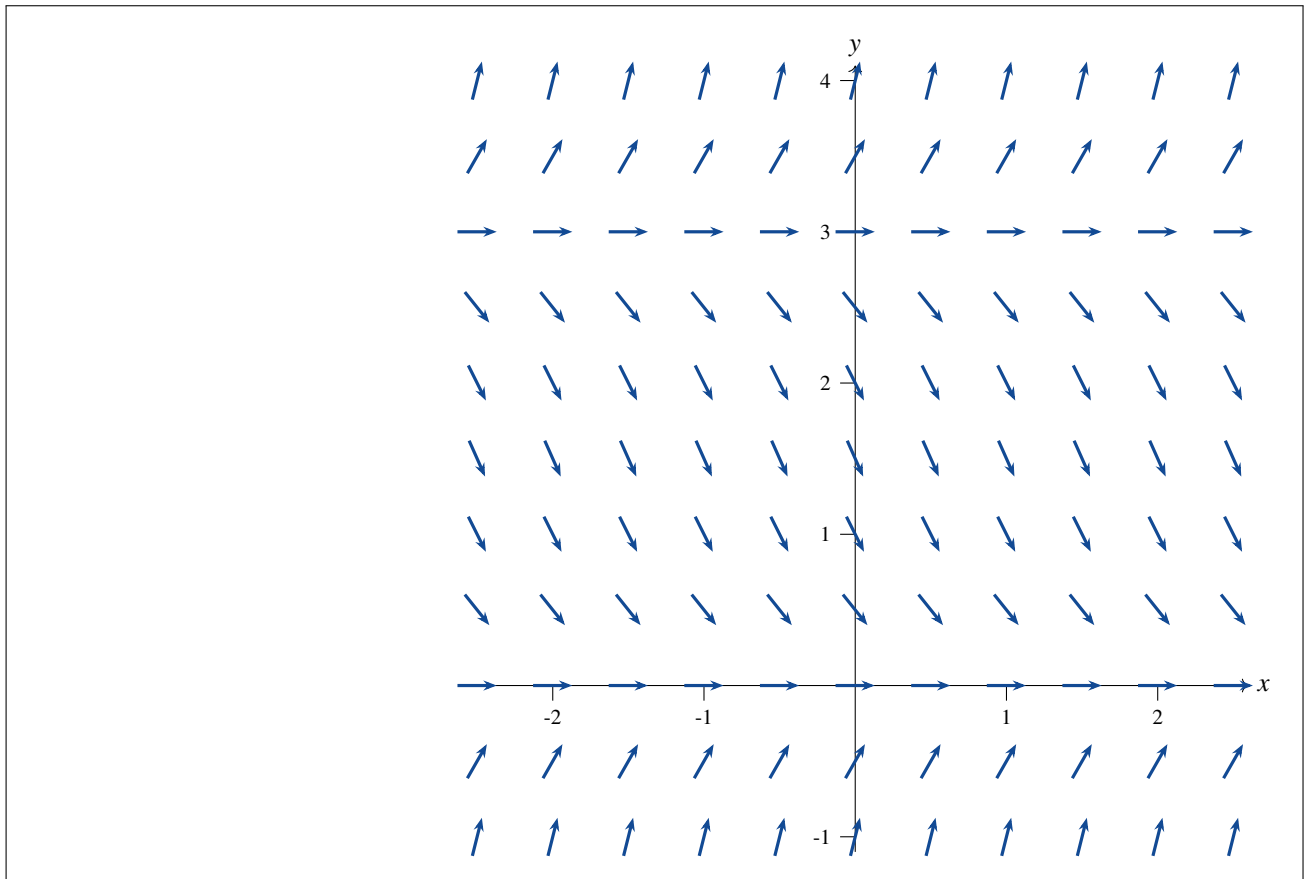
- (b) 15 puan $y' = -y(3 - y)$ denkleminin doğrultu alanını çiziniz.



Solution:

$y = 0$ ve $y = 3$ noktalarında $y' = 0$ olur. Yani $y = 0$ ve $y = 3$ da denklemin denge çözümleri bulunur. Ayrıca y' artan veya azalan olduğu aralıklar belirleyerek doğrultu alanını çizelim.

$0 < y < 3$ ise $y' < 0$ 'dır ve fonksiyon azalır.
 $y < 0$ ve $3 < y$ ise $y' > 0$ 'dır ve fonksiyon artar.



3. 20 puan $(4xy^2 + 4y)dx + (4x^2y + 4x)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution: $M(x, y) = 4xy^2 + 4y$ ve $N(x, y) = 4x^2y + 4x$ alalım. $M_y = 8xy + 4 = N_x$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir. Yani $F_x dx + F_y dy = 0$ olacak şekilde bir $F(x, y) = 0$ fonksiyonu vardır. Buna göre $F_x = 4xy^2 + 4y$ ve $F_y = 4x^2y + 4x$ olur.

$$F_x = 4xy^2 + 4y \Rightarrow F(x, y) = \int (4xy^2 + 4y) dx = 2x^2y^2 + 4xy + h(y)$$
$$F_y = 4x^2y + 4x \Rightarrow F_y = 4x^2y + 4x + h'(y) = 4x^2y + 4x \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C$$
$$F(x, y) = 2x^2y^2 + 4xy + C = 0$$

4. $(r-1)(r^2+9) = 0$ denklemi lineer, homojen ve sabit katsayılı bir diferansiyel denklemin karakteristik denklemi olsun.

(a) **5 puan** Yukarıda bahsedilen diferansiyel denklemi belirleyiniz.

(b) **15 puan** Karakteristik denklemi verilen diferansiyel denklemin $y(0) = 2, y'(0) = -3, y''(0) = 12$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

Solution:

(a) $(r-1)(r^2+9) = 0 \Rightarrow r^3 - r^2 + 9r - 9 = 0 \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} - 9y = 0$

(b) $(r-1)(r^2+9) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3i, r_3 = -3i$ bulunur ve verilen diferansiyel denklemin genel çözümü $y(x) = c_1e^x + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$ olarak bulunur.

Başlangıç koşullarını kullanarak keyfi sabitleri belirleyelim.

$$y(0) = 2 \Rightarrow y(0) = c_1e^0 + c_2 \cos 0 + c_3 \sin 0 = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(0) = -3 \Rightarrow y'(x) = c_1e^x - 3c_2 \sin 3x + 3c_3 \cos 3x \Rightarrow y'(0) = c_1e^0 - 3c_2 \sin 0 + 3c_3 \cos 0 \Rightarrow c_1 + 3c_3 = -3$$

$$y''(0) = 12 \Rightarrow y''(x) = c_1e^x - 9c_2 \cos 3x - 9c_3 \sin 3x \Rightarrow y''(0) = c_1e^0 - 9c_2 \cos 0 - 9c_3 \sin 0 = 12 \Rightarrow c_1 - 9c_2 = 12$$

Elde edilen sistem çözüldüğü zaman $c_1 = 3, c_2 = -1, c_3 = -2$ olarak hesaplanır. Verilen denklemin özel çözümü $y(x) = 3e^x - \cos 3x - 2 \sin 3x$ 'dir.

5. 20 puan $y'' - y' - 2y = -3 + 4t^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution: Öncelikle $y'' - y' - 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım. Denklemin karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow (r - 2)(r + 1) = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = -1$$

şeklindedir. Genel çözüm ise $y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$ olur. İkinci olarak ise tamamlayıcı fonksiyonu Belirsiz Katsayılar Metodunu kullanarak belirleyelim. $y_p(t) = At^2 + Bt + C$ olarak alalım. Buna göre $y_p' = 2At + B$ ve $y_p'' = 2A$ bulunur.

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = -3 + 4t^2$$

$$2A - (2At + B) - 2(At^2 + Bt + C) = -3 + 4t^2$$

$$-2At^2 + (-2A - 2B)t + (2A - B - 2C) = -3 + 4t^2$$

$$\Rightarrow A = -2, B = 2, C = -\frac{3}{2}$$

$$y_p(t) = -2t^2 + 2t - \frac{3}{2}$$

Verilen denklemin genel çözümü $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - 2t^2 + 2t - \frac{3}{2}$ 'dir.