ADI:

SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BÖLÜM:

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ M.Tuba Gülpınar ☑ Hasan Özekes

İMZA:

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	20	
3	25	
4	30	
Toplam	100	

- Sınav süresi 80 dakika.
- Sınavda kopya çeken, kopya veren, kopya çekme girişiminde bulunan öğrenci, o sınavdan sıfır (0) not almış sayılır ve hakkında "Yükseköğretim Kurumları "Öğrenci Disiplin Yönetmeliği" 'nin ilgili hükümleri uyarınca "Disiplin Soruşturması" açılır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Elementer Laplace Dönüşümleri: $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ mevcut ve $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ olarak alalım.

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \ s > a,$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ s > 0,$
- $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
- $f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$
- $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}, \ s > |a|$
- $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}, \ s > |a|$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
- $f * g = g * f = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$
- $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c}), \ c > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, \ s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
- $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
- $\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$

1. (a) 15 puan $y''' - 4y'' - 12y' = 0, y(0) = 1,\ y'(0) = -6,\ y''(0) = 12$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Solution: Verilen diferansiyel denklemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir.

$$r^3 - 4r^2 - 12r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 4r - 12) = 0 \Rightarrow r(r-6)(r+2) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 6, r_3 = -2$$

Denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_1 e^{0t} + c_2 e^{6t} + c_3 e^{-2t} \\
y(t) &= c_1 + c_2 e^{6t} + c_3 e^{-2t} \\
y(0) = 1 &\Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\
y'(0) = -6 \Rightarrow y'(t) = 6c_2 e^{6t} - 2c_3 e^{-2t} &\Rightarrow 6c_2 - 2c_3 = -6 \\
y''(0) = 12 \Rightarrow y'(t) = 36c_2 e^{6t} + 4c_3 e^{-2t} &\Rightarrow 36c_2 + 4c_3 = 12 \\
c_1 &= -2, c_2 = 0, c_3 = 3 \\
y(t) &= -2 + 3e^{-2t}
\end{aligned}$$

(b) $\boxed{\text{10 puan}}$ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x(y^2+1)}{y}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(y^2+1)}{y} \Rightarrow \frac{y}{y^2+1}dy = -2xdx \Rightarrow \int \frac{y}{y^2+1}dy = \int -2xdx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = -x^2 + C$$

2. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^2 \cos 3\tau d\tau$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümünü bulunuz.

Solution:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$t^2 * \cos 3t = \int\limits_0^t (t-\tau)^2 \cos 3\tau d\tau$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \cos 3\tau d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{t^2 * \cos 3t\right\} = \mathcal{L}\left\{t^2\right\}\mathcal{L}\{\cos 3t\} = \frac{2}{s^3}.\frac{s}{s^2+9}$$

(b) $\boxed{\text{10 puan}}$ $F(s) = \dfrac{s}{s^2(s^2+4)}$ fonksiyonunun ters Laplace Dönüşümünü Konvülasyon İntegrali şeklinde yazınız.

Solution:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{2}{s^2+4}\right\} = t * \sin 2t = \int\limits_0^t (t-\tau)\sin 2\tau d\tau$$

3. (a) $\boxed{\text{3 puan}}$ $(3x^2 - y)dx + xdy = 0$ diferansiyel denklemi tam mıdır?

Solution: Öncelikle $M(x,y) = 3x^2 - y$ ve $N(x,y) = x$ olarak alalım. $M_y = -1$, $N_x = 1$ olduğundan denklem tam diferansiyel denklem değildir

(b) $\boxed{\text{5 puan}}$ Eğer tam diferansiyel denklem değil ise, $\mu(x)(3x^2 - y)dx + \mu(x)xdy = 0$ denklemi tam diferansiyel denklem olacak şekilde x değişkenine bağlı $\mu(x)$ integrasyon çarpanını bulunuz.

Solution:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-1-1}{x} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

(c) $\boxed{\text{17 puan}}$ $(3x^2 - y)dx + xdy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Solution:

$$\mu(x)\left[M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\right] \Rightarrow \frac{1}{x^2}\left[(3x^2 - y)dx + xdy = 0\right] \Rightarrow \left(3 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{x}dy = 0$$

$$P(x,y) = 3 - \frac{y}{x^2} \text{ ve } Q(x,y) = \frac{1}{x} \Rightarrow P_y = -\frac{1}{x^2} = Q_x \text{ Tam Diferansiyel Denklem}$$

Dolayısıyla $F_x dx + F_y dy = 0$ olacak şekilde bir $F(x,y) = 0$ fonksiyonu vardır.

$$\begin{aligned} F_x = 3 - \frac{y}{x^2} &\text{ ve } F_y = \frac{1}{x} \\ F(x,y) = \int \frac{1}{x}dy &\Rightarrow F(x,y) = \frac{y}{x} + g(x) \\ F_x = -\frac{y}{x^2} + g'(x) = 3 - \frac{y}{x^2} &\Rightarrow g'(x) = 3 \Rightarrow g(x) = 3x + C \\ F(x,y) &= \frac{y}{x} + 3x + C = 0 \end{aligned}$$

4. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörü $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olan bir matris olmak üzere $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Solution:

$$(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 2w_1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = c_1 \mathbf{v} e^t + c_2 [\mathbf{v}t + \mathbf{w}] e^t = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right] e^t$$

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} t \\ 2t - 1 \end{bmatrix} e^t$$

(b) $\boxed{\text{20 puan}}$ $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4e^{-t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Solution:

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} e^{-t} \Rightarrow \mathbf{x}_p' = -\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\mathbf{x}_p' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p + \begin{bmatrix} 5 \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} e^{-t} \right) + \begin{bmatrix} 5 \\ 4e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -B_1 \\ -B_2 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 3A_1 - A_2 \\ 4A_1 - A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3B_1 - B_2 \\ 4B_1 - B_2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3A_1 - A_2 + 5 \\ 4A_1 - A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3B_1 - B_2 \\ 4B_1 - B_2 + 4 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\begin{bmatrix} 3A_1 - A_2 + 5 \\ 4A_1 - A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 3B_1 - B_2 \\ 4B_1 - B_2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_1 \\ -B_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Denklemin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} t \\ 2t - 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^0 + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^0 + \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} e^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + 5 - 1 \\ 2c_1 - c_2 + 20 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + 15 \begin{bmatrix} t \\ 2t - 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 15t - 1 \\ 30t - 17 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-t}$$