ADI:

SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BÖLÜM:

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ M.Tuba Gülpınar ☑ Hasan Özekes

İMZA:

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	20	
3	30	
4	25	
Toplam	100	

- Sınav süresi 70 dakika.
- Sınavda kopya çeken, kopya veren, kopya çekme girişiminde bulunan öğrenci, o sınavdan sıfır (0) not almış sayılır ve hakkında "Yükseköğretim Kurumları "Öğrenci Disiplin Yönetmeliği" 'nin ilgili hükümleri uyarınca "Disiplin Soruşturması" açılır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- $\boxed{\text{Cevabınızı kutu}}$ içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Elementer Laplace Dönüşümleri: $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ mevcut ve $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ olarak alalım.

- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ s > a,$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0,$
- $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
- $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
- $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2},\ s > |a|$
- $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2},\ s > |a|$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
- $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c}),\ c > 0$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s},\ s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
- $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

1. $\boxed{\text{25 puan}}$ $y'' - 4y' + 4y = t\sin t$, $y(0) = 1$ ve $y'(0) = -3$ başlangıç değer probleminin çözümünün Laplace dönüşümünü, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, bulunuz.

Solution:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' - 4y' + 4y\} &= \mathcal{L}\{t\sin t\} \\
\left[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] - 4\left[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right] + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{t\sin t\} \\
\left[s^2\mathcal{L}\{y\} - s + 3\right] - 4\left[s\mathcal{L}\{y\} - 1\right] + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{t\sin t\} \\
(s^2 - 4s + 4)\mathcal{L}\{y\} - s + 7 &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{s^4+2s^2+1} \\
(s^2 - 4s + 4)\mathcal{L}\{y\} = \frac{2s}{s^4+2s^2+1} + s - 7 &= \frac{s^5 - 7s^4 + 2s^3 - 14s^2 + 3s - 7}{s^4+2s^2+1} \\
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{s^5 - 7s^4 + 2s^3 - 14s^2 + 3s - 7}{(s^4+2s^2+1)(s^2-2s+1)}
\end{aligned}$$

2. $\boxed{\text{20 puan}}$ $F(s) = \dfrac{6s^2+10s+14}{(s-1)(s+2)(s^2+2s+2)}$ ifadesinin ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

Solution:

$$\frac{6s^2+10s+14}{(s-1)(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

$$\Rightarrow 6s^2+10s+14 = A(s+2)(s^2+2s+2) + B(s-1)(s^2+2s+2) + (Cs+D)(s-1)(s+2)$$

$$s=1 \Rightarrow 30 = 15A \Rightarrow A = 2$$

$$s=-2 \Rightarrow 18 = -6B \Rightarrow B = -3$$

$$s=0 \Rightarrow 14 = 4A - 2B - 2D \Rightarrow D = 0$$

$$s=-1 \Rightarrow 10 = A - 2B + 2C - 2D \Rightarrow C = 1$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2+10s+14}{(s-1)(s+2)(s^2+2s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} - \frac{3}{s+2} + \frac{s}{s^2+2s+2}\right\}$$

$$f(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$f(t) = 2e^{t} - 3e^{-2t} + e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$

3. $\boxed{\text{30 puan}}$ $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 3, \\ 0, & 3 \le t < \infty \end{cases}$ olmak üzere $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlangıç değer problemini Laplace Dönüşümü yardımıyla çözünüz.

Solution:

$$f(t) = t - tu_3(t)$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t - tu_3(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-3s} = \frac{1-e^{-3s}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$
$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} = \frac{1-e^{-3s}}{s^2}$$
$$(s^2+1)\mathcal{L}\{y\} = \frac{1-e^{-3s}}{s^2}$$
$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1-e^{-3s}}{s^2(s^2+1)}$$
$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-3s}}{s^2(s^2+1)}\right\}$$
$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$
$$1 = As(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)s^2 \Rightarrow A = 0, B = 1, C = 0, D = -1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-3s}}{s^2(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2(s^2+1)}\right\}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)e^{-3s}\right\}$$
$$y(t) = (t - \sin t) - ((t-3) - \sin(t-3))\,u_3(t)$$

4. $\boxed{\text{25 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

İpucu: A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1$,$\lambda_2 = 2$, ve $\lambda_3 = -3$'dir.

Solution: A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1$,$\lambda_2 = 2$, ve $\lambda_3 = -3$'dir. Karşılık gelen özvektörler ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow (A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -3 \Rightarrow (A + 3I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Problemin genel çözümü

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulunu kullanarak keyfi sabitleri belirleyelim.

$$\begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 6 \\ c_1 + c_2 + 11c_3 = 12 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 11 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = 3, c_2 = -2, c_3 = 1$$

Başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{x}(t) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} e^{-3t} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} e^{-3t}$$