~ CHAPTER-1 ~ 1-8 (Def^n(s)) ①

(1)

1.1-) Metrik Uzaylar ve Topolojik Uzaylar

Tanım: (X,d) metrik uzayı, X uzayı ve d: distance func. (mesafe fonk) ile birlikte tanımlanır

$d: X \times X \to \mathbb{R}$

i) $d(x,y)=0 \iff x=y$

ii) $d(x,y) \geq 0$

iii) $d(x,y)=d(y,x)$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

d metriktir.

Tanım: $\underset{\text{yarıçap}}{B_r}(\overset{\text{merkez}}{x}) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$

→ x merkezli $r>0$ yarıçaplı açık ball.

Interior (iç) Nokta: $x \in \mathcal{U}$ iç noktadır, eğer $\exists\, r>0$ $B_r(x) \subseteq \mathcal{U}$.

Limit Noktası: x, $\mathcal{U}$'nun bir iç noktası olsun. $\mathcal{U}$, x'in bir komşuluğundadır. Eğer $B_r(x) \setminus \{x\} \cap \mathcal{U} \neq 0$ $\forall\, r>0$ ise x limit noktasıdır.

translation by Ms. Serra Doğan.

②

İzole Nokta: $\exists r>0$, $B_r(x) \cap \mathcal{U} = \emptyset$ ise x izole nokta (dış nokta)'dır.

Açık Küme: $\mathcal{U}$'da alınan her x noktası eğer iç nokta ise $\mathcal{U}$ açık kümedir.
(x: iç noktalar kümesi)

$\mathcal{O} = \{ \mathcal{U} \subseteq X : \mathcal{U} \text{ is open} \}$

i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ ← sonlu kesişim

iii) $\{O_\alpha\} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathcal{O}$ → sonsuz birleşim

Topoloji: $(X, \mathcal{O})$ topolojik uzayı, X ve X'lerin alt kümelerinin bir kolleksiyonu olan $\mathcal{O}$, (i)-(iii) sağlıyorsa $\mathcal{O}$ → topolojidir.

Tanım: $\mathcal{O}_1$ ve $\mathcal{O}_2$ topolojileri verilsin. $\mathcal{O}_1$ eğer $\mathcal{O}_2$'dan güçsüz (weaker) ise $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$'dir.

Relative Topology: $(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ topolojik uzayı, $Y \subset X$ alt uzay olsun.

$\tilde{\mathcal{O}} := \{ U \subset Y : \exists\, O \in \mathcal{O} \text{ s.t. } \mathcal{U} = O \cap Y \}$

$(Y, \tilde{\mathcal{O}})$ topolojik uzaydır (Relative Topology)

O takdirde

Temel: Açık altkümelerin bir kolleksiyonu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ temeldir topolojide eğer $\forall\, x \in X$ ve her $\mathcal{U}(x)$'in x'de komşuluğu, $\exists\, O \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in O \subseteq \mathcal{U}(x)$

③

1.1) Eğer $\beta \subset \Theta$ topolojinin temeli ise, açık küme β'nin elemanlarının bir birleşimi olarak yazılabilir.

Proof: Açık küme $\mathcal{U}$, $x \in \mathcal{U}$'nun komşuluğundadır.

Bu yüzden $\mathcal{U} = \bigcup_{\substack{O \in \beta \\ O \subset \mathcal{U}}} O$

Lemma 1.5) (X, d) metrik uzaysa aşağıdakiler eşdeğerdir.

i) f, $x \in X$'de süreklidir.

ii) $x_n \to x$, $f(x_n) \to f(x)$

iii) $f(x)$'nin her komşuluğu $\mathcal{U}$, $f^{-1}(\mathcal{U})$'da x'in her komşuluğudur. (*)

Hatırlatma:

$$f \text{ sürekli} \iff \boxed{\mathcal{U} \text{ açık} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \text{ açık}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{C \text{ kapalı} \Rightarrow f^{-1}(C) \text{ kapalı}}$$

4

Tanım: f homeomorfizmdir, eğer

i) f, 1-1
ii) f sürekli
iii) f^{-1} sürekli

} şartlarını sağlıyorsa.

Hatırlatma: Eğer f 1-1 ise,

f^{-1} sürekli $\Leftrightarrow$ f açık

Tanım: Y bir uzay olsun. fonksiyonun support'u

$f: X \to Y$,

$\operatorname{supp} f := \{ x \in X : f(x) = 0 \}$

Eğer (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar ve

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$ ise

$(X \times Y, d)$ 'de metrik uzaydır.

(x_n, y_n) 'de (x, y) 'ye yakınsa $x_n \to x$, $y_n \to y$.

Çarpım Topolojisi: X ve Y topolojik uzaylar olsun.

Çarpım topolojisi şu şekilde tanımlanır:

$O \subseteq X \times Y$ açık ancak ve ancak $\forall (x, y) \in O$ için öyle bir $U \ni x$ ve $V \ni y$ komşuluğu bulunuyorsa

$U \times V \subseteq O$.

$Y \subset X$ 'in örtüsü $\{U_\alpha\}$ 'ların

bir kümesidir s.t $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Bu örtü eğer her U_α açık ise açıktır

Kompakt: $K \subseteq X$ alt uzayı kompakttır eğer her

K'nın açık örtüsü sonlu sayıda alt örtüye sahipse.

Lemma 1.7) Topolojik uzayın kompakt olması ancak ve ancak sonlu kesişim özelliği sağlanıyorsa

tanımlıdır.

kapalı kümelerin bir kesişim ailesi boş → sonlu alt ailelerin kesişimi boş.

Lemma 1.8) X, topolojik uzaylı

i) Kompakt kümenin sürekli görüntüsü kompakttır.

ii) Kompakt kümelerin her kapalı alt kümesi kompakttır.

iii) Eğer X Hausdorff ise her kompakt küme kapalıdır.

iv) Sonlu birçok kompakt kümenin çarpımı, kompakttır.

Sonuç olarak: X ve Y topolojik uzaylar, X kompakt ve

Y Hausdorff olsun. Her sürekli bijection,

$f: X \to Y$ (homeomorfizm) 'dir.

Definition (Tanım): $K \subseteq X$ sıralı kompakttır eğer her K'daki dizi yakınsayan altdiziler içeriy

Lemma 1.10) X metrik uzayı, $K \subset X$ olsun.

K kompakt $\Leftrightarrow$ K sıralı kompakt.

Tanım: X bir metrik uzay olsun ve $U \subseteq X$. U sınırlıdır eğer birtaş ball'ın içinde içeriyorsa.

~~Theorem~~ Lemma 1.11) Heine / Borel Theorem

$\mathbb{R}^n$ (veya $\mathbb{C}^n$)'de kompaktlık sınırlı ve kapalıysa sağlanır. Yani $\mathbb{R}^n$'de kapalı ve sınırlı her küme kompakttır.

Bolzano-Weierstraß Theorem

$\mathbb{R}^n$'de her sınırlı sonsuz altküme en az 1 limit noktası içerir

Extreme Değer Teoremi

K kompakt olsun. Her sürekli fonksiyon $f: K \to \mathbb{R}$ minimuma ve maksimuma sahiptir.

(Locally compact): Her noktası kompakt komşuluklar içeren uzaya lokal kompakt (tüm kompakt) uzay denir.

Tanım: $x \in X$'in izi ve $Y \subseteq X$ alt kümesi arasındaki mesafe

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x,y)$$

Hatırlatma: x, Y'nin limit noktası $\Leftrightarrow$ $\operatorname{dist}(x,Y) = 0$

Lemma 1.14) X bir metrik uzay olsun.

$$|\operatorname{dist}(x,Y) - \operatorname{dist}(z,Y)| \leq d(x,z)$$

bu yüzden $\operatorname{dist}(x,Y)$ süreklidir

$\longmapsto$

Proof: $\triangle$ inequality: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\inf_{y \in Y} d(x,y) \leq d(x,z) + \inf_{y \in Y} d(z,y).$$

$$\operatorname{dist}(x,Y) \leq d(x,z) + \operatorname{dist}(z,Y)$$

Buradan

$$d(x,z) \geq \operatorname{dist}(z,Y) - \operatorname{dist}(x,Y)$$

$$d(x,z) \geq |\operatorname{dist}(z,Y) - \operatorname{dist}(x,Y)|$$

Urysohn's Lemma: (1.15) X bir metrik uzay, ...

$C_1, C_2 \subseteq X$, C_1 ve C_2 ayrık olsun.

Öyle bir $f: X \to [0,1]$ s.t. $f=0$ C_1'de ve

$f=1$ C_2'de sağlar.

Eğer X kısmi kompakt ve C_2 kompakt ise

f'i kompakt support seçebiliriz.

Lemma (1.16): X lokal kompakt metrik uzay olsun.

Kabul edelim ki $K \subseteq X$ kompakt ve $\{O_j\}_{j=1}^{n}$

K'nın açık örtüsü olsun. $\exists$ K'nın kısmi

birleşimi vardır ki bu örtüyü destekler.

§1.2 – The Banach Space of Continous Functions

(2)

<u>Tanım:</u> A normed vector space $(X, \|\cdot\|)$ is a vector space X together with a function $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ such that

($(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayı X vektör uzayı ve $\|\cdot\| : X \to R$ fonksiyonu ile birlikte;)

i) $\|f\| > 0$, $\forall f \in X$, $f \neq 0$

ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $f \in X$

iii) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, $\forall f, g \in X$.

$\|\cdot\|$ is called a norm. (norm diye adlandırılır)

Eğer sadece ii - iii sağlanıyorsa, seminorm olarak adlandırılır.

<u>Örnek:</u> $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

$C(I) = \{ f : I \to \mathbb{C} : f \text{ sürekli} \}$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)| \quad (\text{maximum norm})$$

$(C(I), \|\cdot\|_\infty) \to$ normlu vektör uzayıdır.

* Norma sahip olduğumuz zaman $\|\cdot\|$, metriğe sahibizdir. $d(f,g) = \|f-g\|$.

Tanım: X ve Y normlu lineer uzaylar olsun.

$f : X \to Y$ süreklidir

$f_n \to f \Rightarrow F(f_n) \to F(f)$

Tanım: A normed space is called complete if every Cauchy sequence is convergent. A complete normed space is called a $\boxed{\text{Banach space}}$

(Normlu uzaylara complete denir eğer her Cauchy serisi yakınsaksa. Complete normlu uzaylara ise Banach uzayı denir.)

Örnek: Gösteriniz ki

$$\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ \text{sequence } a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \|a\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty \right\}$$

$\|\cdot\|$ ile birlikte Banach uzayıdır.

Çözüm: Bunu ispatlamak için,

i) $\ell^1(\mathbb{N})$'in vektör uzayı old.

ii) $\|\cdot\|_1$ norm old.

iii) $\ell^1(\mathbb{N})$'in complete old

göstermemiz gerekir

(toplama ve skalerle çarpma altında kapalı)

(normed space complete)

$$\|a\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty \qquad a = (a_j)_{j=1}^{\infty}$$

① Toplama altında kapalılık;

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j + b_j| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| + \sum_{j=1}^{k} |b_j| \leq \|a\|_1 + \|b\|_1 \quad \forall k < \infty$$

$k \to \infty$; $\quad \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| < \infty$ bu yüzden

$\ell^1(\mathbb{N})$ toplama altında kapalıdır. Ayrıca burada üçgen eşitsizliğini de gösterdik.

② Skalerle çarpım altında kapalılık;

$$\begin{array}{l} a \in \ell^1(\mathbb{N}) \\ \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} |\lambda a_j| \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

$\to$ Bu yüzden $\ell^1(\mathbb{N})$ bir vektör uzaydır.

Yukarıdaki işlemlerden $\|\cdot\|$'nin norm özelliklerini sağladığını görmek mümkün. O yüzden $\ell^1(\mathbb{N})$'nin complete old. göstermeliyiz $\Rightarrow$

$a^n = (a_j^n)_{j=1}^n$ Cauchy dizisi olsun.

yakınsak genel tanım

$\varepsilon > 0$ için, $m, n > N \Rightarrow \|a^m - a^n\|_1 < \varepsilon$

$x_n \to x$ if $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ s.t $n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_j^m - a_j^n| < \varepsilon \quad \forall j$

Her j için, $(a_j^n)_{j=1}^n$ cauchy dizisidir. ($\mathbb{C}$'de)

$\mathbb{C}$ komplete, bu yüzden $\exists$ limit $a_j = \lim_{n \to \infty} a_j^n$

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j^m - a_j^n| < \varepsilon \qquad m \to \infty$$

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j - a_j^n| < \varepsilon \qquad \forall k < \infty \text{ için doğrudur.}$$

Bu yüzden $\|a - a^n\|_1 \leq \varepsilon$. $(a - a^n) \in \ell^1(\mathbb{N})$.

5

T: $C(I)=\{f: I \to \mathbb{C} : f$ sürekli$\}$. $I=[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Bir fonksiyonların dizisi f_n, f'e ancak ve ancak şu şekilde yakınsar;

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| = 0.$$

Kabul edelim ki f_n Cauchy dizisi. Her bir $x\in I$ için, $f_n(x)$ Cauchy dizisinin sayılarıdır.

$$(f_n(x))_{j=1}^{\infty}$$

$\mathbb{C} \to$ komplete, bu yüzden $\exists$ limit sayısı $f(x)$ vardır ki her x için

$(f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x))$. $\varepsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ $\forall m,n > N$, $x\in I$

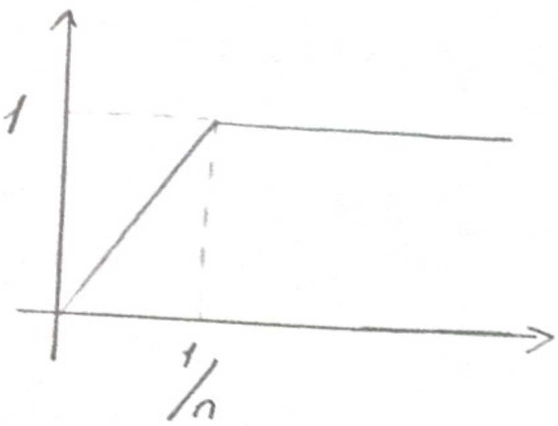
$m\to\infty$

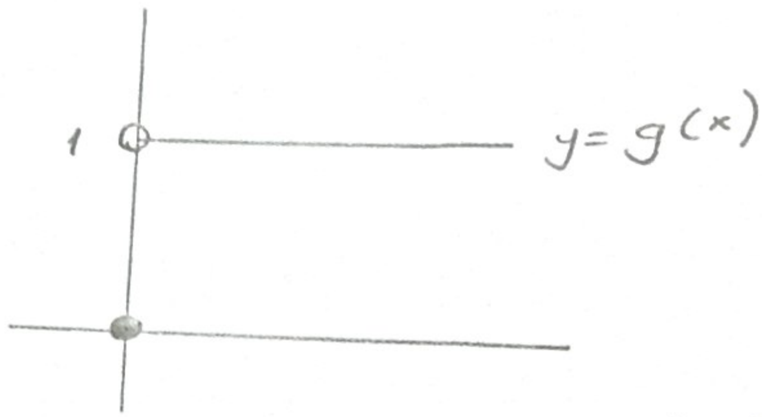
$|f(x)-f_n(x)| \le \varepsilon$ $\forall n>N$, $x\in I$

$\|f-f_n\|_\infty < \varepsilon$. $\forall n > N$. Bu takdirde $f_n \to f$.

⇒ Peki eğer f, $C(I)$'da olsaydı?
Yani f sürekli olsaydı?

(Her x için, $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ tanımlayın)





$(I = [0,b] \subseteq \mathbb{R}$, $C(I) = \{f : I \to \mathbb{C}$ f continous$\})$

Sabitlenmiş bir $x \in I$ ve $\varepsilon > 0$. f'in x'de sürekli olduğunu gösterebilmemiz için δ'yu bulmamız gerek (aşağıdaki şartları gerçekleyen)

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Öyle bir n seçelim ki, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$ ve öyle bir δ seçelim ki $|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ olsun.

Sonra

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

O halde $f \in C(I)$ ve her Cauchy dizisi yakınsadığı için f süreklidir.

...rem 1.17) $C(I)$, maximum normu ile birlikte Banach uzayıdır.

Tanım: $\text{span}\{u_n\} = \{u_n$'in bütün sonlu lineer kombinasyonları$\}$

Hatırlatma: Eğer $\{u_n\}$ sayılabilirse, bir önceki vektörün lineer kombinasyonları alılır,

$\{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\} \subset \mathbb{R}$ ve $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ alabiliriz.

aynı spanları vardır.

Tanım: Lineer bağımsız vektörlerin sayılabilir kümeleri $\{u_n\}_{n=1}^{N}$ $(N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ schauder bazı olarak adlandırılır eğer $\forall f \in X$ tek bir şekilde baz elemanlarının

$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n, \quad c_n = c_n(f) \in \mathbb{C}$$

lineer kombinasyonu olarak yazılabilirse.

$\{u_n\}$ lineer bağımsız, c_n eşsiz (tek).

Örnek: $\delta^n = (\delta_j^n)_{j=1}^{\infty}$

where $\delta_j^n = \begin{cases} 1 & \text{if } j=n \\ 0 & \text{if } j \neq n \end{cases}$

$\delta^1 = 1, 0, 0 \dots$

$\delta^2 = 0, 1, 0 \dots$

$\{\delta^n\}$ Schauder bazı $\ell^1(\mathbb{N})$ Banach uzayında

$\Rightarrow$

$a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N})$.

Tanımlayınız ki: $a^N = \sum_{j=1}^{N} a_j \delta^j$.

Eğer $a = (a_1, a_2, \dots, \dots)$ sonra

$a^N = (a_1, a_2, \dots a_N, 0, 0 \dots)$

$$\|a - a^N\|_1 = \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \to 0 \quad , \; N \to \infty.$$

Bu yüzden $a_j^N = a_j$ $j \leq N$ için ve $a_j^N = 0$ $j > N$ için.

Bu yüzden; $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta^j$ ve $\{\delta^n\}$ schauder bazıdır $\ell^1(\mathbb{N})$'de.

Tanım: Span'i, dense olan küme total olarak adlanır.

Tanım: Normlu lineer uzay sayılabilir dense alt kümesi içerirse "seperable" dır.

§ - The Geometry of Hilbert Space (3)

Tanım: X vektör uzayı olsun. $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ 'ye bir map, inner product (iç çarpım) olarak tanımlanır ancak ve ancak

i) $\langle \alpha f + \beta g , h \rangle = \bar{\alpha} \langle f, h \rangle + \bar{\beta} \langle g, h \rangle$

ii) $\langle f , \alpha g + \beta h \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle$

iii) $\langle f, f \rangle = 0 \quad \forall f \neq 0$

iv) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

Hatırlatma: Verilen bir $\langle \, , \, \rangle$, $|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ şeklinde tanımlanır. Daha sonra bunun norm old. ispatlayacağız.

Tanım: $(X, \langle \, , \, \rangle)$ iç çarpım uzayı. Complete, (her Cauchy dizisi yakınsak) iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ → komplete, $\mathbb{Q}$ complete değil)

Örnek: $\mathbb{C}^n$ 'de $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j b_j$ Hilbert uzayı.

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ a = (a_j)_{j=1}^{\infty} : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{a}_j b_j$$

$(\ell^2(\mathbb{N}), \langle \, , \, \rangle) \to$ seperable Hilbert space.

Tanım: $f \in X$ vektörü birim vektör yada normalize edilmiş vektör ise $\|f\|=1$ 'dir.

→ iki vektör $f, g \in X$ dik (ortogonal) iseler $(f \perp g)$ $\langle f, g \rangle = 0$ olmalıdır. Paralel ise ler

$f = \alpha g \quad (\alpha \in \mathbb{C})$

Eğer $f \perp g$ ise $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Tanım: u birim vektör f'nin projeksiyonu u'nun yönünde ise

$f_{\parallel} = \langle u, f \rangle u$

$f_{\perp} = f - \langle u, f \rangle u$

$f = f_{\parallel} + f_{\perp}$

$f_{\perp} = f - f_{\parallel}$

$f - \langle u, f \rangle u$

$f_{\perp}$, u'ya diktir çünkü

$\langle u, f_{\perp} \rangle = \langle u, f - \langle u, f \rangle u \rangle$

$= \langle u, f \rangle - \langle u, f \rangle \langle u, u \rangle$

$= \langle u, f \rangle - \langle u, f \rangle = 0.$

Başka bir vektör u'ya paralel olsun. $\alpha u \ (\alpha \in \mathbb{C})$

$\|f - \alpha u\|^2 = \|f_{\perp} + f_{\parallel} - \alpha u\|^2$

$= \|f_{\perp}\|^2 + \|f_{\parallel} - \alpha u\|^2 \geq \|f_{\perp}\|^2$

$f_{\parallel} = \langle u, f \rangle u$ u'ya paralel olan birim vektör.

§1.5- Bounded Operators

(5)

Tanım: X ve Y gibi iki normlu uzay arasındaki lineer map A 'ya lineer operatör denir.

$$A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$$

Lineer altuzay $\mathcal{D}(A)$ A'nın tanım bölgesi olarak tanımlanır ve genellikle X'de yoğun olduğu varsayılır.

A'nın kernel'i : $Ker(A) = \{ f \in \mathcal{D}(A) : Af = 0 \} \subseteq X$

Range'i : $Ran(A) := \{ Af : f \in \mathcal{D}(A) \} =: A\,\mathcal{D}(A) \subseteq Y$

A'nın operatör normu:

$$\boxed{\|A\| := \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(A) \\ \|f\|_X = 1}} \|Af\|_Y}$$

$\|A\| < \infty$ ise A sınırlıdır.

Theorem 1.28:

A sınırlı $\Longleftrightarrow$ A sürekli

Proof:

"$\Rightarrow$"

A sınırlı $\Rightarrow$ A Lipschitz süreklidir.

$$\left(\|Af\|_Y \le \|A\| \, \|f\|_X \quad \forall f \in D(A) \right)$$

$f \in D(A)$, $\|f\|_X = 1$

$\Rightarrow$ A sürekli

"$\Leftarrow$" A'nın sınırlı olmadığını kabul edelim.

Öyle bir birim vektörden oluşan u_n dizi vardır ki $\|Au_n\|_Y \geq n$ sağlar. $f_n = \frac{1}{n} u_n$

$f_n \to 0$, fakat $\|Af_n\|_Y \geq 1$ bu yüzden $\not\to 0$.

O halde A sürekli olamaz.

Hatırlatma 1) Eğer X sonlu boyuttaysa, her operator sınırlıdır.

2) Aynı operatorler bir norm için sınırlı, fakat diğer normlar için sınırlı değildir.

nple:

$C'(I)=\{ f: I \to \mathbb{C} : f$ türevlenebilir ve f' sürekli $\}$

$$\|f\|_{\infty,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$$= \max_{x\in I} |f(x)| + \max_{x\in I} |f'(x)|$$

$A = \frac{d}{dx} : C'(I) \to C(I)$ 'ye bir operator

A'nın sınırlı old. gösterelim.

$$\|Af\|_\infty = \|f'\|_\infty = \max_{x\in I} |f'(x)| \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_{\infty,1}$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{f\in C(I)\\ \|f\|_{\infty,1}=1}} \|Af\|_\infty \leq 1$$

Bu yüzden A sınırlıdır.

Örnek: $A = \frac{d}{dx}$; $D(A) \subseteq Y \to Y$

$D(A) = C'(I)$, $Y = C(I)$ $\|.\|_\infty$ 'da old. yerc.

$(A : (C'(I), \|.\|_\infty) \to (C(I), \|.\|_\infty)$

$u_n = \sin(n\pi x)$ olsun. $I = [0,1]$

$$\|u_n\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |u_n(x)| = 1$$

Bu yüzden buradaki her u_n birim vektördür.

Fakat,

$$\|Au_n\|_\infty = \|u_n'\|_\infty$$
$$= \|n\pi . \cos(n\pi x)\|_\infty$$
$$= n\pi \to \infty \qquad n \to \infty$$

Bu yüzden

$$\|A\| = \sup \|Af\| = \infty$$

Bu yüzden A sınırlı değil

...otma:

$\{polinomlar\} \subseteq C'(I) \subseteq C(I)$

Bu yüzden, $C'(I)$, $C(I)$ 'da yoğundur. (Teo. 1.19)

The Bounded Linear Transformation Theorem (1.29)

$A: \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ sınırlı lineer operatör ve Y Banach uzayı olsun. Kabul edelim ki $\mathcal{D}(A)$, X'de yoğun. Bu taktirde öyle bir sürekli ve tek A'nın X'e genişlemesi vardır ki aynı operator normunu içeren.

Proof: A sınırlıysa;

$A: \{Cauchy\ dizisi\} \to \{Cauchy\ dizisi\}$

Bu yüzden biz genişlemeyi şu şekilde tanımlarız.

$f \in X$, $\mathcal{D}(A)$ X'te bir yoğunluk (dense). $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(A)$

Biz burada Cauchy dizisi olarak $f_n \to f$ şeklinde olan seçeriz

$$\bar{A}f = \lim_{n\to\infty} Af_n$$

Burada şunu göstermeliyiz ki bu tanım seçtiğimiz Cauchy dizisinden tamamen bağımsızdır. Ş yüzden g_n alırız g_n başka bir Cauchy dizisi olsun $\to f$.

$$\|Af_n - Ag_n\|_Y = \|A(f_n - g_n)\|_Y \leq \|A\| \, \|f_n - g_n\|_X$$

$$\to 0 \ , \ n \to \infty$$

Eğer $f \in D(A)$ ve biz dizi olarak bir sabit seçseydik $f_n = f$, $\forall n$ $\bar{A}f = Af$. Bu yüzden $\bar{A}$, A'nın bir genişlemesi olur.

(vektörel toplam ve skalerle çarpım süretli) $\Rightarrow$ $\bar{A}$ lineer'dir.

$\|\cdot\|$ süretli ise $\Rightarrow$ $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Tanım: $\mathcal{B}(X,Y) := \{$bütün sınırlı, lineer operatörler $X \to Y\}$
(Teschl'in kitabı $\mathcal{L}(X,Y)$ kullanıyor)

Eğer $X = Y$, $\mathcal{B}(X,X) = \mathcal{B}(X)$ yazılabilir.

Tanım: $\mathcal{B}(X,\mathbb{C})$'deki operatör sınırlı lineer fonksiyonel olarak adlandırılır.

Tanım: (★★★)
$X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$, X'in dual uzayı (ikili uzay) olarak adlanır.

§1.6 - Sums and Quotients of Banach Space

(6)

(BANACH UZAYININ TOPLAMLARI VE BÖLÜMLERİ)

Tanım: $(X_1, \|\cdot\|_1)$ ve $(X_2, \|\cdot\|_2)$ Banach uzayları olsun. Direkt toplam, $X_1 \oplus X_2$, X_1 ve X_2'nin normlarıyla birlikte kartezyen çarpımıdır $(X_1 \times X_2)$

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$$

Hatırlatma: $X_1 \oplus X_2$ 'de Banach uzayıdır (ödev 4)

Hatırlatma: $\mathbb{R}^2$'de bütün normlar denk olduklarından,

$$\|(x_1, x_2)\| = \left(\|x_1\|_1^p + \|x_2\|_2\right)^{1/p}$$ şeklinde yada

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}$$ şeklinde alabiliriz. Ve bunlar da yine Banach uzayından olur.

Hatırlatma: X_1 ve X_2 $X_1 \oplus X_2$'nin alt uzayları olarak, $x_1 \hookrightarrow (x, 0)$ ve $x_2 \hookrightarrow (0, x_n)$ seçilebilir.

$\hookrightarrow$ (injection) işaretin ismi

Tanım: X, Banach uzayı ve $M \subseteq X$ kapalı alt uzayı ($\Rightarrow M$ ayrıca bir Banach uzayı). Bölüm uzayı $X \setminus M$ bütün denklik sınıfıdır.

$$[x] = x + M$$

şeklinde denklik bağıntısını $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in M$ yazabiliriz

$[x]+[y] = [x+y]$ ve $\alpha[x] = [\alpha x]$ kullanılarak gösterilirki $X \setminus M$ bir vektör uzayıdır.

Lemma 1.31) M, Banach uzayı X'in kapalı bir altuzayı olsun.

$X \setminus M$, $\|[x]\| = \inf\limits_{y \in M} \|x+y\|_X$ 'le birlikte (5)

Banach uzayıdır.

İspat: ① $\|.\|$ bir normdur } gösterilmelidir.
② $X \setminus M$ complete 'dir

① Eğer $\|[x]\| = 0$, öyle bir dizi $y_j \in M$ vardırki $y_i \to -x$. Fakat M kapalıdır o yüzden bu dizi $y_i \to -x \in M \to x \in M$. Bu yüzden $[x] = [0]$

$\|\alpha[x]\| = |\alpha| . \|[x]\|$ (gösterelim

$$\|\alpha[x]\| = \inf_{y \in M} \|\alpha x + y\| = \inf_{y \in M} \|\alpha x + \alpha y\|$$

$$= \inf_{y \in M} |\alpha| . \|x+y\| = |\alpha| . \|[x]\|.$$

3

$x_n]$ bir Cauchy dizisi olsun.

alt dizilerin yakınsak olduğunu göstermek yeterince yeterli olduğu için, kabul edelim ki:

$$\| [x_{n+1}] - [x_n] \| < 2^{-n}$$

(5)'den, temsilciyi $x_n \in [x_n]$ seçeriz ki bu x_n de

$\| x_{n+1} - x_n \| < 2^{-n}$ sağlar.

Bu yüzden x_n, X'de bir Cauchy dizisidir.

Bütün yapılanlar şunu ispatlar ki: $[x_n] \to [x]$