CHAPTER - 2

HILBERT SPACE

(7)

X, Hilbert uzayı olsun.

§2.1) Ortonormal Bazlar

Tanım: $\{u_j\}$ vektörlerinden oluşan küme f'nin ortonormal kümesidir.

i) $\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j$ ve

ii) $\langle u_j, u_j \rangle = 1 \quad \forall j$

Hatırlatma: Her ortonormal küme lineerli bağımsızdır.

Lemma 2.1) Kabul ediniz ki: $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ ortonormal bir küme.

Her $f \in X$ şu şekilde yazılabilir.

$$f = f_{\parallel} + f_{\perp}, \quad f_{\parallel} = \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, f \rangle u_j$$

$f_{\parallel}$ ve $f_{\perp}$'in ortogonal old. (olk) old yerlerde.

Ayrıca $\langle u_j, f_{\perp} \rangle = 0 \quad \forall\, 1 \le j \le n.$

⑥

In Particular (Kısmen)

$$\|f\|^2 = \|f_{\parallel}\|^2 + \|f_{\perp}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, f \rangle|^2 + \|f_{\perp}\|^2$$

Ayrıca, eğer $g \in \operatorname{span}\{u_j\}$

$$\|f - g\| \geq \|f_{\perp}\|$$

"=" ile ancak ve ancak $g = f_{\parallel}$.

Başka bir değişle, $f_{\parallel}$ $\{u_j\}$'nin span'lerinden en eşsiz (tek) olan vektördür f'e en yakın olan

İspat: Öncelikle

$$\langle u_j, f-f_{\parallel}\rangle = \langle u_j, f\rangle - \langle u_j, \sum_{j=1}^{n} \langle u_i, f\rangle u_i\rangle$$

$$= \langle u_j, f\rangle - \sum \langle u_j, \langle u_i, f\rangle u_i\rangle$$

$$= \langle u_j, f\rangle - \sum \langle u_i, f\rangle \langle u_j, u_j\rangle$$

$$= \langle u_j, f\rangle - \langle u_j, f\rangle = 0.$$

Bu yüzden $f_{\parallel}$ ve $f_{\perp} = f - f_{\parallel}$ birbirine diktir.

Burada Pythagorean Teoremini hatırlayalım.

Eğer $f \perp g$;

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$ idi.

6'yı gösterelim,

Kabul edelim ki $g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \in \text{span}\{u_j\}$.

$$\|f-g\|^2 = \|f_{\parallel} + f_{\perp} - g\|^2 = \|f_{\parallel} - g\|^2 + \|f_{\perp}\|^2$$

$$= \|f_{\perp}\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, f\rangle - \alpha_j|^2.$$

O halde,

$\|f-g\| \geq \|f_{\perp}\|$ ve "=" ile ancak ve ancak $f_{\parallel} = g$, aynı şekilde ancak ve ancak

$$\alpha_j = \langle u_j, f\rangle \quad \forall j.$$

Not: (6)'dan, Bessel'in eşitsizliğini

alabiliriz,

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, f\rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

"=" ile ancak ve ancak $f \in \mathrm{span}\{u_j\}$.

Hatırlatma; Tabiki de biz X'i sonlu boyutlu vektör uzayı olarak varsaymayız. Lemma 2.1'i keyfi ortonormal küme $\{u_j\}_{j\in J}$'e göre genelleştirmeliyiz.

Öncelikle kabul edelim ki J sayılabilir. Daha sonra Bessel eşitsizliği $\Rightarrow \sum_{j=J} |\langle u_j, f\rangle|$ kesinlikle yakınsar. Hatta eğer $K \subseteq J$ sonlu ise,

$$\|\sum_{j\in K} \langle u_j, f\rangle u_j\|^2 = \sum_{j\in K} |\langle u_j, f\rangle|^2$$

Pythagoras'dan görülür. Bu yüzden

$\sum_{j\in J} \langle u_j, f\rangle u_j$ tanımlanır $\Leftrightarrow \sum_{j\in J} |\langle u_j, f\rangle|^2 < \infty$

Şimdi J herhangi bir küme. Bessel eşitsizliğinden $\forall\ \varepsilon > 0$, öyle bir çoğunlukta j vardır ki

$|\langle u_j, f\rangle| \geq \varepsilon$ (at most (çoğunlukta) $\|f\|/\varepsilon$)

Bu yüzden bir çok sayılabilir p vardır

$| \langle u_j, f \rangle | > 0.$

Bu yüzden, $\sum_{j \in J} | \langle u_j, f \rangle |^2$ tanımlanır.

Completeness 'dan dolayı

$\sum_{j \in J} \langle u_j, f \rangle u_j$ tanımlanır.

Teorem 2.2) $\{u_j\}_{j \in J}$ Hilbert uzayında ortonormal bir küme olsun. Her $f \in X$ şu şekilde yazılır,

$f = f_{\parallel} + f_{\perp}$, $f_{\parallel} = \sum_{j \in J} \langle u_j, f \rangle u_j$

$f_{\parallel}$ ve $f_{\perp}$ ortogonal (dik). Ayrıca $\langle u_j, f_{\perp} \rangle = 0.$

$\forall j \in J.$

(8)

$\| f \|^2 = \sum_{j \in J} | \langle u_j, f \rangle |^2 + \| f_{\perp} \|^2$

Ayrıca, eğer $g \in \text{span} \{u_j\}_{j \in J}$ ise

(9)

$\| f - g \| \geq \| f_{\perp} \|$

"=" ile ancak ve ancak $g = f_{\parallel}$. Bir başka deyişle span $\{u_j\}$ 'de f'e $f_{\parallel}$ tek (eşsiz) vektördür en yakın olan.

$\langle , \rangle$ süretli olduğundan, ispatın 1. kısmı
Lemma 2.1 ile aynı.

Son kısım için, $g \in \overline{span\{u_j\}}$ ve $g_n \in span\{u_j\}$,
$g_n \to g$.
Buradan,
$$\|g - g_n\|^2 = \|g_{\|} - g_n\|^2 + \|g_{\perp}\|^2$$
$\searrow 0$,

Bu yüzden, $g_n \to g_{\|}$ ve $g_{\perp} = 0$.
Bu yüzden g şu şekilde yazılır,
$$g = \sum_{j \in J} \langle u_j, g \rangle u_j \qquad (g = g_{\|})$$
Sonra Lemma 2.1'deki kopyala.

Hatırlatma: Bessel eşitsizliği $\Rightarrow$ $f \to f_{\|}$ süretli

Hatırlatma: Her $f \in X$ için şu şekildeki yazımdan,
$$f = \sum_{j \in J} \langle u_j, f \rangle u_j$$
kısmi olarak ilgileniriz.
Bu durumda, $\{u_j\}_{j \in J}$ ortonormal bazdır (ONB).

Hatırlatma: Eğer X ayrılabiliyorsa, ONB üzerinde kurmak (? anlamadım) kolaydır.

X ayrılabilir (seperable) olsun, öyle bir sayıl... total küme $\{f_j\}_{j=1}^{N}$ vardır.

(Eğer X sonlu boyuttaysa, $N \in \mathbb{N}$, eğer sonsuz boyutta ise N...

Varsayabiliriz ki f_{n+1}, $f_1, f_2, \dots, f_n$ lineer kombinasyonunu temsil etmez.

Daha sonra OND üzerinde şu şekilde kurabiliriz:

Öncelikle; $u_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$

$$u_2 = \frac{f_2 - \langle u_1, f_2 \rangle u_1}{\|f_2 - \langle u_1, f_2 \rangle u_1\|} \qquad u_3 = \frac{f_3 - \langle u_1, f_3 \rangle u_1 - \langle u_2, f_3 \rangle u_2}{\| \cdot \text{———} \|}$$

(f_2 ile başlıyoruz ve f_2'nin bulunduğu kısmı kaldırıyoruz u_1'e paralel olduğunda. Ve normalize ediyoruz $\|u_2\| = 1$)

$\langle u_1, u_1 \rangle = 1$

$\langle u_2, u_2 \rangle = 1$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \left\langle u_1, \frac{f_2 - \langle u_1, f_2 \rangle u_1}{\|f_2 - \langle u_1, f_2 \rangle u_1\|} \right\rangle$$

$$= \frac{\langle u_1, f_2 \rangle - \langle u_1, \langle u_1, f_2 \rangle u_1 \rangle}{\| \quad \|} = \frac{\langle u_1, f_2 \rangle - \langle u_1, f_2 \rangle \overbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}^{1}}{\| \quad \|} = 0$$

Ve devam edilirse

$$u_n = \frac{f_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle u_j, f_n \rangle u_j}{\|f_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle u_j, f_n \rangle u_j\|}$$

$\downarrow$

Unit vector (Birim Vektör!)

$\langle u_j, u_k\rangle = 0$, $\langle u_j, u_j\rangle = 1$ $\forall j \neq k$

Gram- Schmidt orthogonisation) → olarak adlandırılır.

$\Rightarrow$ span $\{u_j\}$ = span $\{f_i\}$ X'de yoğun olan bir

$\{u_j\}$ ortonormal kümesi elde edelim.

kabul edelim ki $\exists f \in X$ var ki $f = f_{\parallel} + f_{\perp}$ ve

$f_{\perp} \neq 0$ sağlasın.

$\{u_j\}$ total olduğundan, $\exists$ $g \in$ span $\{u_j\}$ vardır ki

$\varepsilon > 0$ için sağlanır. 19

$\|f-g\| \leq \|f_{\perp}\| < \varepsilon$

Bu yüzden $\{u_j\}$ ONB'dir. (ispatlandı)

Teorem: Parçalanabilir (Ayrılabilir) her Hilbert uzayının ortonormal bazı vardır.

Örnek: $X = \mathcal{L}^2_{cont}([0,1]) = (C([0,1]), \langle\ ,\ \rangle_{L^2})$

$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_0^1 \bar{f} g$ old. yerde

$f_n(x) = x^{n-1}$ ve $\{f_n\}$ X'de totaldir

Wiestraß (Thm 1.19) uyarınca. $f(1) = 1$

Yukarıda old. gibi;

$$\|f_1\| = \left(\int_0^1 |f_1|^2\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 1^2\,dx\right)^{1/2} = 1$$

$$u_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = 1$$

$f_2(x) = x$

$$f_2 - \langle u_1, f_2\rangle u_1 = x - \left(\int_0^1 x\,dx\right) \times 1$$

$$= x - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = x - 1/2$$

$$\|x-\tfrac{1}{2}\|_{L^2}=\left(\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^2dx\right)^{1/2}=\left(\int_0^1 x^2-x+\tfrac{1}{4}\,dx\right)^{1/2}$$

$$=\left(\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^1\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{f_2-\langle u_1,f_2\rangle u_1}{\|\quad\|_{L^2}}=u_2=\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}$$

$f_3(x)=x^2$

$$u_3=f_3-\langle u_1,f_3\rangle u_1-\langle u_2,f_3\rangle u_2$$

$$=x^2-\langle 1,x^2\rangle 1-\langle 2\sqrt{3}x-\sqrt{3},x^2\rangle(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})$$

$$u_3=\frac{x^2-\langle 1,x^2\rangle 1-\langle 2\sqrt{3}x-\sqrt{3},x^2\rangle(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})}{\|x^2-\langle 1,x^2\rangle 1-\langle 2\sqrt{3}x-\sqrt{3},x^2\rangle(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})\|}=\cdots$$

$=Ax^2+Bx+C \quad (A,B,C\in\mathbb{R})$

$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\ n\in\mathbb{Z}$ 'lerden oluşan fonksiyonlar $X=L^2$ cont $([0,2\pi])$ için.

kümesi ONB'de bir form'dur

Görebiliriz ki;

i) $\langle u_n,u_n\rangle=1 \quad \left(\bar{f}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inx}\right)$

ii) $n\neq m \Rightarrow \langle u_n,u_m\rangle=0$

iii) $\{u_n\}$ tatoldir (fourier series)

2.4) $\{u_j\}_{j\in J}$ X Hilbert uzayında ortonormal

ne olsun. Aşağıdakiler birbirlerine denktir.

i) $\{u_j\}_{j\in J}$ maksimal ortonormal kümedir.

ii) $\forall f \in X, \quad f = \sum_j \langle u_j, f\rangle u_j$

iii) $\forall f \in X, \quad \|f\|^2 = \sum_j |\langle u_j, f\rangle|^2$; Parseval'in ilişkisi

iv) $\langle u_j, f\rangle = 0 \quad \forall j \in J \Rightarrow f = 0.$

İspot: $(i) \Rightarrow (ii)$ $\quad (i) \nRightarrow (ii)$

Eğer $f_\perp \neq 0$, tanımlayınız ki $\hat{f_\perp} = \dfrac{f_\perp}{\|f_\perp\|}$ (değil)

$\hat{f_\perp}$, u_j'lere ortogonal olan birim vektördür.

Bu yüzden $\{u_j\} \cup \{\hat{f_\perp}\}$ en büyük ortonormal kümedir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

$(ii) \Rightarrow f_\perp = 0$ (Theorem 2.2)

$(iii) \Rightarrow (iv)$

$\langle u_j, f\rangle = 0 \quad \forall j \Rightarrow \|f\|^2 = \sum |\langle u_j, f\rangle|^2 = 0$

$\Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Eğer $\{u_j\}$ maksimal değilse, öyle bir birim vektör vardır ki (g) $\{u_j\} \cup \{g\}$'yi en büyük ortonormal set yapar.

$\|g\| = 1$ fakat $\langle u_j, g\rangle = 0 \quad \forall j$, sonra

$(iv) \Rightarrow g = 0 \Rightarrow \|g\| = 0$ (Contradiction)

Çelişki

Teorem 2.5) X Hilbert uzayında, her ONB aynı kardinaliteye sahiptir.

İspat: WLOG varsayalım ki X sonsuz boyutlu.

$\{u_j\}_{j\in J}$ ve $\{v_k\}_{k\in K}$ 2 tane ONB olsun.

$K_j = \{k\in K : \langle v_k, u_j\rangle \neq 0\}$ Buradan K_j sayılabilir.

Bu yüzden

$$\tilde{K} = \bigcup_{j\in J} K_j \subseteq K$$ J ile aynı kardinaliteye sahiptir.

Fakat (Teo 2.4)

$k\in K\setminus\tilde{K} \Rightarrow \langle v_k, u_j\rangle = 0, \ \forall j \Rightarrow v_k = 0$

Bu yüzden $\tilde{K}\cup\{0\} = K$

Tanım: ONB'nin kardinalitesi aynı zamanda Hilbert uzayının (X)'in boyutu olarak da adlandırılır.

Tanım: 1-1 lineer operatör $U\in\mathcal{B}(X_1, X_2)$ birim olarak adlandırılır, eğer

$$\langle Uf, Ug\rangle_{X_2} = \langle f,g\rangle_{X_1} \quad \forall f,g\in X_1$$ (10)

Polarize identity'den

$\left(\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left[\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 + \dots\right]\right)$

(10) ancak ve ancak $\|Uf\|_{X_2} = \|f\|_{X_1} \ \forall f\in X_1$ iken doğrudur.

...m: iki Hilbert uzayı X_1 ve X_2 birbirlerinin
...irim eşdeğeri dir eğer ki aralarında birim 1.1 'lik
varsa: $\mathcal{U} \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$

Örnek: X, ayrılabilir sonsuz boyutlu Hilber uzayı
olsun ve $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 'de herhangi bir ONB olsun.

$$\mathcal{U} : X \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad f \to (\langle u_j, f\rangle)_{j \in \mathbb{N}}$$

$\mathcal{U}$ unitary (birim) dir.

2 takdirde

i) Theo (2.4) (ii) $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ örtendir

ii) Theo (2.4) (iii) $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ normu korur $(\|\mathcal{U}f\| = \|f\|)$

10'dan yola çıkılacak

$$\left[\ell^2(\mathbb{N}) = \|a\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2\right)^{1/2}\right]$$

iii) Norm koruyan lineer map genellik (1-1) 'dir.

Theorem (2.6): Her ayrılabilir, sonsuz boyutlu Hilbert uzayı $\ell^2(\mathbb{N})$' ye birim ~~eşlenik tir~~. denktir
bir deyişle sadece 1 tane.

Hatırlatma: Başka sonsuz boyutlu Hilbert uzayı vardır.

Örnek: $(Bf)(x) = f(1-x)$

$$B : (C([0,1]), \|.\|_{L^2}) \to (C([0,1]), \|.\|_{L^2})$$

old. gösteriniz.

$\mathcal{U}$ birim ise $\|\mathcal{U}f\| = \|f\|$ yani $\mathcal{U}$ normu korur.

Theorem (2-7): Her Hilbert uzayı ONB'ye sahiptir.

Cebir:

P, sıt kümesi

Tanım: Kısmi türev ikili ilişkidir $\precsim$

$\forall\ A, B, C \in P,$

i) $A \subseteq A$

ii) $A \precsim B$ ve $B \precsim A \Rightarrow A = B$

iii) $A \leq B$ ve $B \leq C \Rightarrow A \leq C.$

Örnek: $P(x) = \{ X$'in bütün alt kümeleri$\}$. $P(x)$ $\leq$ tarafından kısmi türevlenmiş olsun.

NOT: Eğer $A, B \in P$, belki $A \leq B$ yada $B \leq A$'ya sahip olamayabiliriz.

Tanım: Eğer $\forall\ A, B \in P$ ve $A \leq B$ yada $B \leq A$ herhangi biri mevcutsa P total türevlenmiştir.

Örnek: $\mathbb{R}$ $\leq$ ile total türevlenmiştir.

Tanım: Eğer P kısmi türevlenmiş ise, total türevlenmiş zincir (chain) olarak adlandırılır.

Eğer $Q \subseteq P$ ve $M \in P$ $A \leq M$'yi sağlarsa $\forall\ A \in Q$ vardır ki M burada Q'nun üst sınırı olarak adlandırılır.

Örnek: $P(x)$ yukarıdaki gibi. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P(x)$

$A_n \subseteq A_{n+1}$'i $\forall n \in \mathbb{N}$ için sağlarsa, burada $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir zincir ve $\bigcup_n A_n$'de üst sınırdır denir.

$M \in P$ maksimal elemandır eğer ki

$\in P$, $M \leq A \Rightarrow M = A$ ise.

Zorn's LEMMA: Her zincirinin üst sınırı olan her kısmi sıralanmış küme en az 1 tane maksimal eleman içerir.

Teorem 2.7'nin ispatı:

- $P = \{ X$'deki bütün ON kümeler$\} \leq$ tarafından kısmi sıralanmış.
- Her zincir bir üst sınıra sahip.
- Zorn $\Rightarrow \exists$ maximal eleman. Bu yüzden ON kümesi hiç bir ON kümesinin alt kümesi değildir.

Hatırlatma: Eğer $\{ u_j \}_{j \in J}$ X'de bir ONB ise, gösterebiliriz ki X, $\ell^2(J)$'in birim eşleniğidir. Doğru J'yi seçerek, herhangi boyutta bir Hilbert uzayını elde edebiliriz.

§2.2. The Projection Theorem and the Riesz Lemma

Tanım: $M \subseteq X$ olsun. $M^{\perp} = \{ f : \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall g \in M \}$

M'in ortogonal komplementi'dir.

$\langle \, , \, \rangle$ sürekli $\Rightarrow$ $M^{\perp}$ kapalı lineer alt uzay.

lineer olma durumu $\Rightarrow$ $\left(\overline{\text{span}(M)}\right)^{\perp} = M^{\perp}$

Örnek: $X = \mathbb{R}^3$

$M = \{ (x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R} \} \approx \mathbb{R}^2$

$M^{\perp} = \{ (0, 0, z) : z \in \mathbb{R} \} \approx \mathbb{R}$

Örnek: $X^{\perp} = \{0\}$

$(\{u_j\}_{j \in J}$ ONB, $\langle u_j, f \rangle = 0 \quad \forall j \in J \Rightarrow f = 0)$

The Projection Theorem (2-8)

M, X Hilbert uzayının kapalı lineer altuzayı olsun.

Her $f \in X$ için tek bir (uniqeley) $f = f_{\parallel} + f_{\perp}$ $f_{\parallel} \in M$ ve $f_{\perp} \in M^{\perp}$

yazılabilir. Bu durumda,

$M \oplus M^{\perp} = X$ yazabiliriz.

$\mathcal{M}$ kapalı $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ Hilbert uzayıdır.

$\Rightarrow \exists$ ONB $\{u_j\}_{j\in J}$ of $\mathcal{M}$.

Teorem 2.2 'den $\Rightarrow$ Vardır (Bulunur)

Tek olduğunu göstermemiz gerekir. Varsayalım ki

$$f = f_{\parallel} + f_{\perp} \quad \text{ve} \quad f = \tilde{f}_{\parallel} + \tilde{f}_{\perp} \text{ olsun.}$$

Buradan;

$$f_{\parallel} - \tilde{f}_{\parallel} = \tilde{f}_{\perp} - f_{\perp} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$$

Corollary 2.9: Her ortonormal küme $\{u_j\}_{j\in J}$ ONB'de genişletilmiş olarak bulunur.

İspat: Sadece $(\{u_j\}_{j\in J})^{\perp}$ için ONB'ye ekleyin.

Hatırlatma: Teorem 2-8. Bize der ki $\forall f \in X$ için, öyle bir eşsiz (unige) vektör, $f_{\parallel} \in \mathcal{M}$ vardır ki f'e en yakın olan. (The rest $f - f_{\parallel}$ lies in $\mathcal{M}^{\perp}$)

Operatörü;

$$\left.\begin{aligned} P_{\mathcal{M}} : X &\to \mathcal{M} \subseteq X \\ f &\to f_{\parallel} \end{aligned}\right\} \text{ } \mathcal{M} \text{ ile ilgili ortogonal projeksiyondur.}$$

Örnek: $X = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{M} = \{(x, y, 0)\}$

$$P_{\mathcal{M}}(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Hatırlatma:

$P_M f = f_{\parallel}$ ortogonal projeksiyon ⑫

$\langle P_M g, f\rangle = \langle g, P_M f\rangle$

- $P_M^2 = P_M$ ve

$\langle P_M g, f\rangle = \langle g_{\parallel}, f\rangle = \langle g_{\parallel}, f_{\parallel} + f_{\perp}\rangle$

$= \langle g_{\parallel}, f_{\parallel}\rangle + \cancel{\langle g_{\parallel}, f_{\perp}\rangle}^{0} = \langle g_{\parallel}, f_{\parallel}\rangle = \dots = \langle f, P_M g\rangle$

- $P_{M^{\perp}} f = f - P_M f = f_{\perp}$
- Eğer M' en yakın alt uzaysa;

$P_{M^{\perp\perp}} = \underbrace{\mathbb{I}}_{\text{identity map (birim map)}} - P_{M^{\perp}} = \mathbb{I} - (\mathbb{I} - P_M) = P_M$

Bu yüzden $M = M^{\perp\perp}$.

Eğer M herhangi bir alt küme ise,

$M^{\perp\perp} = \overline{\text{span}(M)}$ yazılabilir.

- $X^{\perp} = \{0\}$ old. dolayı $M^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow M$ total 'dir.

Şimdi bir lineer fonksiyonu göz önüne alalım.
$(X \to \mathbb{C})$

Örnek: $\ell_g : X \to \mathbb{C}$, $f \to \langle g, f\rangle$ lineer fonksiyonu göz önüne alalım,

$$\boxed{\|\ell_g\| = \sup_{\|f\|=1} |\ell_g f| = \sup_{\|f\|=1} |\langle g, f\rangle|} \ \text{\textasteriskcentered}$$

$$\leq \sup_{\|f\|=1} \|g\|\,\|f\| = \|g\| < \infty \text{ olduğundan}$$

ℓ_g sınırlıdır.

Riesz Lemma (2.10)

Varsayalım ki ℓ, X Hilbert uzayında sınırlı lineer fonksiyon olsun. O halde öyle bir eşsiz (tek) vektör $g \in X$ vardır ki, $\forall f \in X$ için sağlar.

$$\ell(f) = \langle g, f \rangle$$

Başka bir deyişle, Hilbert uzayı kendi ikili uzayına (dual space) denktir. $X \approx X^*$, X ve X^* arasında

$f \to \langle f, \cdot \rangle$ üzerinde izomorfizmdir. $\boxed{\left(X^* = B(X, \mathbb{C}) \right)}$

Proof:

"Existence" (Var olması)

Eğer $\ell = 0$, $g = 0$ seçebiliriz. Varsayalım ki $\ell \neq 0$. O halde $\ker(\ell) = \{ f : \ell(f) = 0 \}$ düzenli uzay (proper space) ve öyle bir birim vektör vardır ki $\tilde{g} \in \ker(\ell)^{\perp}$.

$$\forall f \in X, \quad \ell\left(\ell(f)\tilde{g} - \ell(\tilde{g}) f \right) = \ell(f)\ell(\tilde{g}) - \ell(\tilde{g})\ell(f) = 0 \text{ 'dır.}$$

Bu yüzden

$$\ell(f)\tilde{g} - \ell(\tilde{g}) f \in \ker(\ell).$$

Bu yüzden,

$0 = \langle \tilde{g}, \ell(f)\tilde{g} - \ell(\tilde{g})f \rangle = \ell(f)\langle \tilde{g}, \tilde{g}\rangle - \ell(\tilde{g})\langle \tilde{g}, f$

$= \ell(f) - \langle \overline{\ell(\tilde{g})}\tilde{g}, f\rangle$

$(g = \overline{\ell(\tilde{g})}\,\tilde{g}$ seçelim$)$

$\ell(f) = \langle g, f\rangle \quad \forall f \in X$

$M^{\perp} = \{ f : \langle g, f\rangle = 0 \ \forall g \in M$

Eğer $f \in M^{\perp}$ ve $g \in M$ ise $\langle f, g\rangle = 0$ 'dır.

"<u>Uniqueness</u>" (Teklik / Eşsizlik)

g_1 ve g_2 2 benzer vektör,

$\langle g_1 - g_2, f\rangle = \langle g_1, f\rangle - \langle g_2, f\rangle$

$= \ell(f) - \ell(f) = 0 \quad \forall f \in X$

Bu yüzden $g_1 - g_2 \in X^{\perp} = \{0\}$

§ 2.3. Operators Defined Via Forms

$s : X \times X \to \mathbb{C}$

s burada sesquilineardır eğer:

- $s(\alpha f + \beta g, h) = \bar{\alpha} s(f, h) + \bar{\beta}(g, h)$
- $s(f, \alpha g + \beta h) = \alpha s(f, g) + \beta(f, h)$

s, sınırlıdır eğer $|s(f, g)| \leq c\|f\| \cdot \|g\| \ \forall f, g.$

no 2.11) s sınırlı sesquilineer olsun.
öyle bir tek A operatörü vardır ki,

$s(f,g) = \langle f, Ag \rangle$ $\forall f,g$ sağlar.

Ve dahası, A'nın normu $\|A\| = \sup\limits_{\|f\|=\|g\|=1} |s(f,g)|$.

İspot: $\forall g \in X$, öyle bir sınırlı lineer $l_g \in X = \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$
fonksiyonu tanımları $l_g(f) = s(f,g)$'den dolayı.

Theorem 2.10) $\exists!\ h_g \in X$ $l_g(f) = \langle h_g, f \rangle$.
$Ag = h_g$'dan $A: X \to X$ tanımlanır. Ve buradan
A lineerdir. Ayrıca,
$\|Af\|^2 = \langle Af, Af \rangle = s(Af, f) \leq C\|Af\|\,\|f\|$
Bu yüzden $\|Af\| \leq C\|f\|$ $\forall f$ bu yüzden $\|A\| \leq C$.
Bu yüzden A sınırlı (13) ispotın sol tarafı.

Theorem 2.12) Her $A \in \mathcal{B}(X)$ için, öyle bir
eşsiz (tek) $A^* \in \mathcal{B}(X)$ vardır ki
$\langle f, A^* g \rangle = \langle Af, g \rangle$ $\forall f,g \in X$ sağlayan.
A^* burada A'nın adjointi olarak adlandırılır.

Örnek: $X = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ A^* hesaplayınız.

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in X.$

$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x} \cdot \underline{y}$

$\langle \underline{x}, A^* \underline{y} \rangle = \langle A\underline{x}, \underline{y} \rangle$

$= \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \left\langle \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= (ax_1 + bx_2)y_1 + (cx_1 + dx_2)y_2$

$= (ay_1 + cy_2)x_1 + (by_1 + dy_2)x_2$

$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ay_1 + cy_2 \\ by_1 + dy_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underline{x}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \underline{y} \right\rangle$

Buradan $A^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$X = \mathbb{C}^n \quad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}\, y_j$

Eğer $A = (a_{jk})_{1 \le j,k \le n}$, $A^* = (\overline{a}_{kj})_{1 \le j,k \le n}$.

$\langle f, Ag \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{f}\, Ag = \int_a^b \overline{f(x)}\, Kg(x)\, dx$

Ex! $X = C([0,1])$

$\langle f,g\rangle_{L^2} = \int_0^1 \bar{f} g \qquad Af = (7+3i)f$

$\langle f, A^* g\rangle = \langle Af, g\rangle = \langle (7+3i)f, g\rangle$

$= \int_0^1 [\overline{(7+3i)f}]\, g = \int_0^1 \bar{f}[(7-3i)g] = \langle f, (7-3i)g\rangle$

Bu yüzden $A^* g = (7-3i)g$

Lemma 2.13) $A, B \in \mathcal{B}(X)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$.

i) $(A+B)^* = A^* + B^*$ ve $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$

ii) $A^{**} = A$

iii) $(AB)^* = B^* A^*$

iv) $\|A^{**}\| = \|A\|$ ve $\|A\|^2 = \|A . A^*\| = \|A^* A\|$

İspat:

i) You check =)

ii) $\langle f, A^{**} g\rangle = \langle A^* f, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$

iii) $\langle f, (AB)^* g\rangle = \langle (AB)f, g\rangle$

$= \langle A(Bf), g\rangle = \langle Bf, A^* g\rangle$

$= \langle f, B^* A^* g\rangle$

iv) By (13)

$$\|A^*\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle f, A^*g\rangle| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle Af, g\rangle|$$

$$= \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\overline{\langle g, Af\rangle}| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle g, Af\rangle| = \|A\|.$$

ve

$$\|A^*A\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle f, A^*Ag\rangle| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle Af, Ag\rangle|$$

$$= \sup_{\|f\|=1} \|Af\|^2 = \|A\|^2$$

Çünkü $|\langle Af, Ag\rangle|$ supremumu elde ettirir. Cauchy-Schwarz'a göre paralel Af ve Ag olduğu zaman.

Hatırlatma: $\|A\| = \|A^*\| \Rightarrow A \to A^*$ sürekli

Hatırlatma: $Ker(A^*) = Ran(A)^\perp$

$f \in Ker(A^*) \Leftrightarrow A^*f = 0 \Leftrightarrow \cdots$

$\Leftrightarrow \langle f, g\rangle = 0 \quad \forall g \in Ran(A)$

$\Leftrightarrow f \in Ran(A)^\perp$