~ CHAPTER - 3 ~

Compact Operators

(8)

3.1)

Tanım: X ve Y normlu uzaylar olsun. $A: X \to Y$ lineer operatörü kompakttır eğer, her sınırlı dizi; $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, dizi $\{Af_n\}_{n=1}^{\infty}$ yakınsak olan alt diziler içeriyorsa.

$K(X,Y) = \{A: X \to Y : A \text{ kompakt}\}$

(Teschl K yerine $\mathcal{C}$ kullanıyor)

Theorem 3.1)

- Her kompakt lineer operator sınırlıdır

  (i.e. $K(X,Y) \subset B(X,Y)$)

- Kompakt operatörlerin lineer kombinasyonları da kompakttır.

  (i.e. $A, B \in K(X,Y), \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha A + B \in K(X,Y)$)

- Sınırlı operatörlerin ve kompakt operatörlerin çarpımları kompakttır.

  (i.e. $B \in \mathcal{B}(X,Y), K \in K(Y,Z) \Rightarrow (KB) \in K(X,Z)$

  ve

  $K \in K(X,Y), B \in \mathcal{B}(Y,Z) \Rightarrow (BK) \in K(X,Z)$)

(Proof 'u exam sorusu olabilir)

Theorem 3.2) Y, Banach uzay ve $\{A_n\} \subseteq K(X,$
yakınsak dizi olsun, $A_n \to A$ ise $A \in K(X,Y)$.
(Y Banach $\Rightarrow K(X,Y)$ kapalı)

İspat:

$f_j^{(0)}$ X'de sınırlı dizi olsun.

A_1 kompakt, bu yüzden alt dizi vardır.

$f_j^{(1)}$, $A_1 f_j^{(1)}$ yakınsar.

$(\{f_j^{(1)}\} \subseteq \{f_j^{(0)}\})$

$f_j^{(1)}$'den, $f_j^{(2)}$ diğer alt dizisini seçelim şu şekilde,

$A_2 f_j^{(2)}$ yakınsıyor.

$\{f_j^{(2)}\} \subseteq \{f_j^{(1)}\}$'den, $A_1 f_j^{(2)}$'nin de

yakınsak old. biliyoruz.

$f_j^{(n)}$, $n \to \infty$ kaybolacağı, yok olacağı için,

$f_j := f_j^{(j)}$ şeklinde kabul ederiz.

$j \geq n$ için, f_j, $f_j^{(n)}$'in bir alt dizisidir.

Bu yüzden $A_n f_j$ her sabitlenmiş (fixed) n için

Cauchy'dir.

$$\|Af_j - Af_k\| = \|(A-A_n)(f_j-f_k) + A_n(f_j-f_k)\|$$

$$\leq \underbrace{\|A-A_n\|}_{\to 0}\,\|f_j-f_k\| + \underbrace{\|A_n f_j - A_n f_k\|}_{\to 0}$$

Bu yüzden Af_j Cauchy'dir. Y komplete, bu yüzden $\forall f_j$ yakınsar. O yüzden A kompakttır.

Theorem: X normlanmış (normlu) uzay ve

$A \in K(X) = K(X,X)$.

$\bar{X}$, X'in completion'u olsun.

$\bar{A} \in K(\bar{X})$, A'nın genişlemesi olan $\bar{A}$, $\bar{X}$'de.

Hatırlatma: X, $\bar{X}$'in dense'i (yoğun) olsun.

eğer $T: \bar{X} \to \bar{X}$ kompakt olduğunu göstermek istiyorsak, $T|_X : X \to X$ kompakt olduğunu göstermek yeterlidir.

Teorem 3.3'ün ispatı:

$f_n \in \bar{X}$ sınırlı dizi olsun. $\bar{A}f_n$'in yakınsak bir alt dizisinin old. göstermek istiyoruz.

$f_n^j \in X$'i: $\|f_n^j - f_n\| \leq 1/j$ şeklinde seçeriz.

A kompakt, bu yüzden varsayarız ki

$Af_n^j \to g$.

Fakat sonra

$$\|\bar{A}f_n - g\| \leq \|\bar{A}\|\,\|f_n - f_n^j\| + \|Af_n^j - g\| \to 0$$

Bu yüzden $\bar{A}f_n$ yakınsar. Bu yüzden $\bar{A}$ kompakttır.

§3.2) The Spectral Theorem of Compact Symmetrical Operators

X bir Hilbert uzayı olsun.

Tanım: Lineer operatör $A: X \to X$ simetrik olarak adlandırılır eğer tanım X'de dense (yoğun ise) ise ve eğer,

$$\langle g, Af \rangle = \langle Ag, f \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(A).$$

Hatırlatma: Eğer A sınırlıysa ($\mathcal{D}(A) = X$ ile)

A simetriktir $\Rightarrow A = A^*$ $\left(\langle g, Af \rangle = \langle A^* g, f \rangle \Updownarrow \text{tanım } A \text{ kendi adjointi} \right)$

Hatırlatma: Eğer operatör sınırlı değil ise, simetri ve kendi adjointi olma arasında fark vardır.

Örnek: $X = \mathbb{C}^n$, $\langle w, z \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{w_j} z_j$ $\quad z = (z_1, z_2 \ldots z_n)$ etc.

$A: X \to X$ $\quad \langle w, Az \rangle = \langle w, 2z \rangle = \sum \overline{w_j} (2 z_j)$

$Az = 2z$

$$= \sum \overline{(2 w_j)} z_j = \langle 2w, z \rangle = \langle \, ? \, \rangle$$

(NOTE: $\|A\| = 2$, so $A = A^*$)

Tanım: $\lambda \in \mathbb{C}$ sabiti A'nın özgen değeri olarak adlandırılır eğer $\exists\, u \in \mathcal{D}(A)$, $u \neq 0$

$\boxed{Au = \lambda u}$ sağlanıyorsa.

...ktör olan u → ilgili özgen vektör olarak adlandırılır.
(Bazen özgen fonk. olarak)

λ'nın ilgili özgenvektörlerinin kümesi λ'nın özgen uzayı olarak adlandırılır ve $Ker(A-\lambda)$ şeklinde yazılır. $\overbrace{(A-\lambda I)}$

Eğer sadece bir tane lineer bağımsız öyle bir özgenvektör varsa, bu özgen vektör <u>simple</u> (basit) olarak adlandırılır.

Teorem 3.6) A simetrik olsun. O yüzden bütün özgen değerler reel ve farklı özgen değerlere karşı gelen özgen vektörler <u>ortogonal (dik)</u>'tir.

<u>İspat:</u> Varsayalım ki,
- $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{D}(A)$
- $Au = \lambda u$
- $\|u\| = 1$

Bu yüzden,
$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda \|u\|^2 \\ &= \lambda \langle u, u\rangle = \langle Au, u\rangle \\ &= \langle u, Au\rangle \\ &= \overline{\langle Au, u\rangle} \\ &= \bar{\lambda}\langle u, u\rangle = \bar{\lambda} \quad \Rightarrow \boxed{\lambda \in \mathbb{R}}\end{aligned}$$

Varsayalım ki;
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}(A)$
- $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{D}(A)$
- $\lambda \neq \mu$
- $Au = \lambda u$
- $Av = \mu v$

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\langle u, v\rangle &= \lambda\langle u, v\rangle - \mu\langle u, v\rangle \\ &= \langle Au, v\rangle - \langle u, Av\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

$\lambda \neq \mu$, bu yüzden $\langle u, v\rangle = 0$.
Bu yüzden u ve v birbirine diktir.

Teorem 3.7) Simetrik, kompakt operatör A, $|\alpha_1| = \|A\|$ sağlayan bir α_1 öz değere sahiptir.

İspat: $\alpha := \|A\|$ olsun. Varsayalım ki $\alpha \neq 0$ (i.e. $A \neq 0$)

WLOG

$$\|A\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \|Af\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \langle Af, Af \rangle = \sup_{\|f\|=1} \langle f, A^2 f \rangle$$

'den dolayı, öyle bir u_n'lerden oluşan dizi vardır ki,

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, A^2 u_n \rangle = \alpha^2$$ sağlar.

A compact olduğundan dolayı, WLOG'u kabul edebiliriz, $A^2 u_n$ yakınsar,

$$\lim_{n\to\infty} A^2 u_n = \alpha^2 u$$

($\lim_{n\to\infty} u_n = u$ old. göstermek istiyoruz)

$$\|(A^2 - \alpha^2) u_n\|^2 = \|A^2 u_n\|^2 - 2\alpha^2 \langle u_n, A^2 u_n \rangle + \alpha^4 \leq \dots$$

$$(\langle f+g, f+g \rangle = \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \|g\|^2)$$

$$\Rightarrow \dots \leq (\|A\| . \|Au_n\|)^2 - 2\alpha \langle u_n, A^2 u_n \rangle + \alpha^4$$

$$\leq (\|A\|^2 . \|u_n\|^2) - 2\alpha \dots + \alpha^4$$

$$= \alpha^4 \dots + \alpha^4$$

$$= 2\alpha^2 (\alpha^2 - \langle u_n, A^2 u_n \rangle) \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = u \,//$$

$(A^2-\alpha^2)u=0$, u, A^2'nin özvektörü.

Bu yüzden; $(A+\alpha)(A-\alpha)u=0$.

$v:=(A-\alpha)u=0$ ya da $v\neq 0$ ve $(A+\alpha)v=0$

Burada ya $v\neq 0$ A'nın özvektörüdür

$-\alpha$'ya karşı gelen ya da $u\neq 0$

A'nın özvektörüdür α'ya karşı gelen.

A simetriktir eğer $\langle g, Af\rangle = \langle Ag, f\rangle$

$\forall f, g \in \mathcal{D}(A)$.

- λ özdeğer eğer öyle bir $v\neq 0$ vardır ki $Av=\lambda v$ olan.
- v özvektör
- λ basit (simple)'dır, eğer öyle bir tane lineer bağımsız özvektör varsa.

Teorem 3.7: A simetrik, öyle bir özdeğer α_1 vardır ki; $|\alpha_1| = \|A\|$.

Hatırlatma: Eğer A sınırlı ise, öyle bir λ vardır ki

$|\lambda| \geq \|A\|$.

Varsayalım ki A simetrik ve kompakt,

Varsayalım ki α_1, $|\alpha_1| = \|A\|$ sağlayan özdeğer ve α_1'e karşı gelen özvektör u_1'de

$(Au_1=\alpha_1 u_1$ $\|u_1\|=1)$

$X_1 = \{u\}^{\perp} = \{f \in X : \langle f, u_1 \rangle = 0\}$

$f \in X_1 \Rightarrow \quad \langle u, Af \rangle = \langle Au, f \rangle$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad = \alpha_1 \langle u_1, f \rangle = 0$

$\Rightarrow Af \in X_1$

Bu yüzden A'yı X_1 ile kısıtlayıp yeni operatörü

$A_1 : X_1 \to X_1$ yapabiliriz. A_1 ayrıca simetrik ve kompakttır.

$[f \in X_1 \Rightarrow A_1 f = Af \in X_1]$

Teorem 3.7'den, A_1, α_2 gibi bir aygendeğere sahiptir. Ve $|\alpha_2| = \|A_1\|$, ve buna karşı gelen aygenvektör u_2, $\|u_2\| = 1$.

$X_2 = \{u_2\}^{\perp} \quad A_2 : X_2 \to X_2$

repeat

Bir dizideki aygendeğerleri α_j buna karşı gelen aygen vektörleri u_j, $\|u_j\| = 1$ diyelim.

Not, $j \neq k \Rightarrow \langle u_j, u_k \rangle = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \subseteq & X_3 & \subseteq & X_2 & \subseteq & X_1 & \subseteq X \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & u_3 & & u_2 & & u_1 & \end{array}$$

" $j \neq k$ $\langle u_j, u_k \rangle = 0$

Bu yüzden $\{u_j\}$ ONl kümesidir.

Eğer X sonlu boyutlu ise, $\{u_j\}$ sonludur.

aksitakdirde sonsuzdur.

Fakat, eğer $An=0$ bazı n 'ler için, $\alpha_k = 0$ $\forall k \geq n$.

Teorem 3.8) Varsayalım ki: X sonsuz boyutlu Hilbert uzayı, ve $A: X \to X$ 'e simetrik, kompakt operatör. Ve öyle bir α_j reel özgen değerlerinden oluşan dizi vardır. Normalize edilmiş vektörlere karşı gelen ortonormal küme ve $\forall f \in X$,

15

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u_j, f \rangle u_j + h$$

$h \in Ker(A)$ ($Ah=0$) old. yerlerde

Kısmi olarak, eğer 0 özgendeğer değil ise, $\{u_j\}$ ONB 'dir.

İspat: $\exists$ α_j ve u_j old. gösterdik ki

eğer $\alpha_j \nrightarrow 0$, sonra öyle bir alt dizi $|\alpha_{jk}| \geq \varepsilon$ $\forall k$.

α_{jk} gördük ki sınırlı dizidir

Bu yüzden; $v_k := \alpha_{jk}^{-1} u_{jk}$

$(\|v_k\| = |\alpha_{jk}^{-1}| \|u_{jk}\| \leq \frac{1}{\varepsilon})$ ve Av_k yakınsayan alt dizisi vardır.

Fakat

$$\|AV_k - AV_\ell\|^2 = \|w_k - u_{j_k}\|^2 = 2$$

Bu yüzden AV_k yakınsak altdiziye sahip olamaz

(Çelişki)

Şimdi

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, f \rangle u_j$$

Sonra

$$\|A(f - f_n)\| \leq |\alpha_n| \|f - f_n\| \leq |\alpha_n| \|f\|$$

$f_n - f \in X_n$'den dolayı ve $\|A_n\| = |\alpha_n|$

$n \to \infty$ iken $\|A(f - f_\infty)\| = 0$

15

THE AND