OKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

03.11.2011 **MAT 461 – Fonksiyonel Analiz I – Ara Sınav** N. Course

ADI SOYADI
ÖĞRENCİ NO
İMZA

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have 60 minutes to answer 2 questions from a choice of 3. If you choose to answer more than 2 questions, then only your best 2 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You should write your student number on every page.
5. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the final 10 minutes of the exam.
6. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
7. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
8. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam 60 dakikadır. Sınavda 3 soru sorulmuştur. Bu sorulardan 2 tanesini seçerek cevaplayınız. 2'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 2 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
5. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
6. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
7. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
8. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	TOTAL

Question 1 (Hilbert Spaces)**.** Let

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}$$

and

$$\langle a, b \rangle_2 := \sum_{j=1}^{\infty} \overline{a}_j b_j.$$

(a) [5 pts] Give the definition of a Hilbert space.

(b) [7 pts] Show that $\ell^2(\mathbb{N})$ is a vector space.

(c) [8 pts] Show that $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ is an inner product on $\ell^2(\mathbb{N})$.

(d) [15 pts] Show that $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ is a Hilbert space.

(e) [15 pts] Show that $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ is separable.

[HINT: You might like to consider the set $A = \{a \in \ell^2(\mathbb{N}) : \mathrm{Re}(a_j), \mathrm{Im}(a_j) \in \mathbb{Q},$ only finitely many of the a_j are non-zero$\}$.]

Question 2 (Norms)**.**

(a) [5 pts] Let X be a vector space and let $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$ be norms on X. Give the definition of "$\|\cdot\|_2$ *is stronger than* $\|\cdot\|_1$".

(b) [10 pts] Suppose that $\|\cdot\|_2$ is stronger than $\|\cdot\|_1$. Suppose that $(x_n)_{j=1}^{\infty} \subseteq X$ is a $\|\cdot\|_2$-Cauchy sequence. Show that $(x_n)_{j=1}^{\infty}$ is also a $\|\cdot\|_1$-Cauchy sequence.

(c) [10 pts] Suppose that $\|\cdot\|_2$ is stronger than $\|\cdot\|_1$. Suppose that the function $f : X \to Y$ is continuous in $(X, \|\cdot\|_1)$. Show that $f : X \to Y$ is also continuous in $(X, \|\cdot\|_2)$.

(d) [10 pts] Suppose that $\|\cdot\|_2$ is stronger than $\|\cdot\|_1$. Suppose that A is dense in $(X, \|\cdot\|_2)$. Show that A is also dense in $(X, \|\cdot\|_1)$.

Let $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$,

$$C(I) := \{f : I \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous}\},$$

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in I} |f(x)| \, .$$

(e) [15 pts] We proved in class that $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ is separable. You may assume this. Show that $(C(I), \|\cdot\|_{L^2})$ is separable.

Question 3 (Banach spaces)**.**

(a) [5 pts] Give the definition of a Banach space.

Let $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ and let

$$C^1(I) := \{f : I \to \mathbb{C} : f \text{ is differentiable and } f' \text{ is continuous}\}.$$

(b) [5 pts] Show that $C^1(I)$ is a vector space.

Let

$$\|f\|_{\infty,1} := \max_{x\in I} |f(x)| + \max_{x\in I} |f'(x)|.$$

(c) [10 pts] Show that $\|\cdot\|_{\infty,1}$ is a norm on $C^1(I)$.

(d) [15 pts] Show that $(C^1(I), \|\cdot\|_{\infty,1})$ is a Banach space.

[HINT: If f_n is a Cauchy sequence in $(C^1(I), \|\cdot\|_{\infty,1})$ then f_n and f_n' are Cauchy sequences in $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$. You may assume that $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ is complete. The Fundamental Theorem of Calculus tells us that $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$. You may assume that $\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt$.]

(e) [15 pts] Prove that $C^1(I)$ is separable.

[HINT: In class, we proved that the set of all polynomials is dense in $C(I) := \{f : I \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous}\}$.]