OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK-MİMARLIK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2016.01.04 **MAT461 Fonksiyonel Analiz I – Final Sınavı** N. Course

ADI:	Ö R N E K T İ R
SOYADI:	S A M P L E
ÖĞRENCİ NO:	
İMZA:	

Süre: **120** dk.

Sınav sorularından **4** tanesini seçerek cevaplayınız.

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have **120** minutes to answer **4** questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You must show your working for all questions.
5. Write your student number on every page.
6. This exam contains 12 pages. Check to see if any pages are missing.
7. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
8. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
9. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
10. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam **120** dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **4** tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
5. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
6. Sınav 12 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
7. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
8. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
9. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
10. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	TOPLAM
/25	/25	/25	/25	/25	/100

Notation:

$$
\begin{aligned}
C([a,b]) &= \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous } \} \\
C^1([a,b]) &= \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ and } f' \text{ are continuous } \} \\
C^\infty([a,b]) &= \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \tfrac{d^n f}{dx^n} \text{ exists and is continuous } \forall n\} \\
\|f\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \\
\|f\|_{\infty,1} &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ell^p(\mathbb{N}) &= \Big\{a = (a_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{C} : \sum_{j=1}^\infty |a_j|^p < \infty\Big\} \\
\|a\|_p &= \Big(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
\ell^\infty(\mathbb{N}) &= \Big\{a = (a_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{C} : \sup_j |a_j| < \infty\Big\} \\
\|a\|_\infty &= \sup_j |a_j|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^2_{cont}([a,b]) &= \big(C([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}\big) \\
\langle f, g \rangle_{L^2} &= \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(X,Y) &= \{A : X \to Y : A \text{ is linear and bounded}\} \\
\mathcal{B}(X) &= \mathcal{B}(X,X) \\
\mathcal{K}(X,Y) &= \{A : X \to Y : A \text{ is linear and compact}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{x+iy} &= x - iy \\
A^* &= \text{adjoint of } A \\
\text{Ker}(A) &= \text{kernal of } A = \{f \in X : Af = 0\} \\
\text{Ran}(A) &= \text{range of } A = \{Af : f \in X\} \\
M^\perp &= \text{orthogonal complement of } M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\wedge &= \text{“and”} \\
\vee &= \text{“or”}
\end{aligned}
$$

Soru 1 (Operators Defined via Forms) Let X be a Hilbert space.

(a) [4p] Give the definition of a *sesquilinear form* on X.

(b) [12p] Let $A \in \mathcal{B}(X)$. Show that **there exists** a **unique** operator $A^* \in \mathcal{B}(X)$ such that

$$\langle f, A^* g \rangle = \langle Af, g \rangle$$

for all $f, g \in X$.

(c) [1p] What name do we give to A^*?

(d) [8p] Show that $\|A\| = \|A^*\|$

Soru 2 (The Spectral Theorem for Compact Symmetric Operators) Let X be a Hilbert space.

(a) [7p] Suppose that $B : X \to X$ is a bounded operator and suppose that λ is an eigenvalue of B. Show that $|\lambda| \leq \|B\|$.

(b) [4p] Give the definition of a *symmetrical* operator.

Suppose that the linear operator $A : X \to X$ is symmetrical and compact. Suppose that $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ is a eigenvalue of A and suppose that $|\alpha_1| = \|A\|$. (We proved in class that it is always possible to find such an eigenvalue.) Let u_1 be a corresponding normalised eigenvector ($\|u_1\| = 1$).

Define

$$X_1 := \{u_1\}^\perp = \{f \in X : \langle u_1, f \rangle = 0\} \subseteq X.$$

Then

$$f \in X_1 \implies \langle u_1, Af \rangle = \langle Au_1, f \rangle = \alpha_1 \langle u_1, f \rangle = 0 \implies Af \in X_1.$$

So we can define a new operator $A_1 : X_1 \to X_1$ by $A_1 f := Af$.

(c) [7p] Show that A_1 is symmetrical.

(d) [7p] Show that A_1 is compact.

Soru 3 (Orthogonal Complements and Orthogonal Projection) Let X be a Hilbert space. Let M be a closed linear subspace of X.

(a) [3p] Give the definition of a *total* set.

(b) [4p] Give the definition of the *orthogonal projection corresponding to* M, P_M.

(c) [7p] Calculate $\|P_M\|$.

Let $S \subseteq X$ be a subset of X.

(d) [11p] Show that

$$S^{\perp} = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad S \text{ is total.}$$

Soru 4 (Inner Products) Let X be a vector space.

(a) [5p] Give the definition of an *inner product* on X.

(b) [5p] Give an example of an inner product space. Prove that your inner product satisfies the definition that you wrote in part (a).

Now let X be a Hilbert space. The *Parallelogram Law* tell us that

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

for all $f, g \in X$. The *Generalised Parallelogram Law* states that

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 + \sum_{1 \le j < k \le n} \|x_j - x_k\|^2 = n \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \tag{1}$$

for all $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$. Note that the case $n = 2$ is the same as the Parallelogram Law.

(c) [15p] Prove the Generalised Parallelogram Law.

Soru 5 (Compact Operators) Let X be a normed space.

(a) [3p] Give the definition of a *compact set*.

(b) [5p] Give the definition of a *compact operator*.

(c) [5p] Give an example of a compact operator. Prove that your operator is compact.

Let $K : X \to X$ be a compact operator. Let $\bar{X}$ denote the completion of X. By the B.L.T. Theorem, $\exists$ a unique continuous extension of K to $\bar{X}$. Let $\bar{K} : \bar{X} \to \bar{X}$ denote this extension.

(d) [12p] Show that $\bar{K}$ is a compact operator.