OKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

28.03.2012 **MAT 462 – Fonksiyonel Analiz II – Ara Sınav** N. Course

ADI SOYADI
ÖĞRENCİ NO
İMZA

Do not open the next page until you are told that the exam has started.

1. You will have 60 minutes to answer 2 questions from a choice of 3 . If you choose to answer more than 2 questions, then only your best 2 answers will be counted.
2. The points awarded for each part of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You should write your student number on every page.
5. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the final 10 minutes of the exam.
6. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
7. All bags, coats, books, notes etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
8. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. Sınav süresi toplam 60 dakikadır. Sınavda 3 soru sorulmuştur. Bu sorulardan 2 tanesini seçerek cevaplayınız. 2'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 2 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
5. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
6. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
7. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
8. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	TOTAL

Notation:

$$\begin{aligned}
C([a,b]) &= \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous } \} \\
C^1([a,b]) &= \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ and } f' \text{ are continuous } \} \\
C^\infty([a,b]) &= \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \tfrac{d^n f}{dx^n} \text{ exists and is continuous } \forall n\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \\
\|f\|_{\infty,1} &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^2_{cont}([a,b]) &= \big(C([a,b]), \langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2}\big) \\
\langle f, g\rangle_{L^2} &= \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\ dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(X,Y) &= \{A : X \to Y : A \text{ is linear and bounded}\} \\
\mathcal{B}(X) &= \mathcal{B}(X,X) \\
\mathcal{K}(X,Y) &= \{A : X \to Y : A \text{ is linear and compact}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{x+iy} &= x - iy \\
A^* &= \text{adjoint of } A \\
\text{Ker}(A) &= \text{kernal of } A = \{f \in X : Af = 0\} \\
\text{Ran}(A) &= \text{range of } A = \{Af : f \in X\} \\
M^\perp &= \text{orthogonal complement of } M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^* &= \text{dual space of } X \\
X^{**} &= \text{double dual space of } X
\end{aligned}$$

Question 1 (Dual Spaces)**.** Let

$$\begin{aligned} c_0(\mathbb{N}) &= \{\text{sequences which converge to } 0\} \\ &= \{a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : a_j \to 0 \text{ as } j \to \infty\} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

$c_0(\mathbb{N})$ is a subspace of the Banach space $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

(a) [14 pts] Show that $c_0(\mathbb{N})$ is a Banach space.
[HINT: Show that $c_0(\mathbb{N})$ is closed. A closed subspace of a Banach space is a ...?]

Let

$$\begin{aligned} c(\mathbb{N}) &= \{\text{sequences which converge}\} \\ &= \{a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \exists L \in \mathbb{C} \text{ such that } a_j \to L \text{ as } j \to \infty\} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

$c(\mathbb{N})$ is also a Banach space.

(b) [9 pts] Show that

$$c(\mathbb{N}) = \operatorname{span}\{c_0(\mathbb{N}), e\}$$

where $e = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$.

Let $l \in \ell^\infty(\mathbb{N})^* = \mathcal{B}(\ell^\infty(\mathbb{N}), \mathbb{C})$. Define

$$\delta_j^n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = j \\ 0 & \text{if } n \neq j. \end{cases}$$

[For example, δ^5 is the sequence $(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\ldots)$]

(c) [9 pts] Show that there exists a sequence $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ such that

$$|\alpha_n| = 1 \qquad \text{and} \qquad |l(\delta^n)| = l(\alpha_n \delta^n)$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

Now define a sequence $y = (y_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ by $y_n = l(\delta^n)$.

(d) [9 pts] Show that

$$l(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \tag{1}$$

for all $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

(e) [9 pts] Use part (c) to show that

$$\|y\|_1 \leq \|l\|.$$

[HINT: $\|x\|_p = (\sum |x_n|^p)^{1/p}$.]

ÖĞRENCİ NO.

Question 2 (Closed Operators)**.** Let X and Y be a Banach spaces.

(a) [8 pts] Give the definition of the *graph* of an operator $A : \mathfrak{D}(A) \subseteq X \to Y$.

(b) [7 pts] Give the definition of a *closed operator*.

(c) [15 pts] Now let $A : X \to Y$ be an operator. Suppose that A satisfies the following property:

- Let (x_n) be any sequence in X. If $x_n \to x$ and $Ax_n \to y$, then $Ax = y$.

Show that A is a closed operator.
[HINT: Start by letting (x_n, Ax_n) be any Cauchy sequence in $\Gamma(A)$.]

(d) [15 pts] Now let X be a Hilbert space. Let $A : X \to X$ be a symmetrical operator [i.e. $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle \ \forall x, y \in X$]. Let (x_n) be a sequence such that $x_n \to x \in X$ and $Ax_n \to y \in X$.

Show that $Ax = y$.

(e) [5 pts] Is the following statement true or false?

"Every symmetrical operator, on a Hilbert space, is a closed operator."

☐ true ☐ false

Question 3 (Weak Convergence)**.** Let X be a Banach space.

(a) [10 pts] Let (x_n) be a sequence in X. Give the definition of x_n *converges weakly* to x (i.e. $x_n \rightharpoonup x$ as $n \to \infty$).

(b) [15 pts] Show that the weak limit is unique (i.e. show that if $x_n \rightharpoonup x$ and $x_n \rightharpoonup \tilde{x}$, then $x = \tilde{x}$).

(c) [25 pts] Suppose that $l_n \to l$ in X^* and $x_n \rightharpoonup x$ in X. Show that $l_n(x_n) \to l(x)$ as $n \to \infty$.
[HINT: By the Uniform Boundedness Principle, every weakly Cauchy sequence (x_n) is bounded, $\|x_n\| \le M$.]