OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK-MİMARLIK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2016.05.18 **MAT462 Fonksiyonel Analiz II – Final Sınavı** N. Course

ADI:	ÖRNEKTİR
SOYADI:	SAMPLE
ÖĞRENCİ NO:	01060
İMZA:	

Süre: **120** dk.

Sınav sorularından **4** tanesini seçerek cevaplayınız.

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have **120** minutes to answer **4** questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You must show your working for all questions.
5. Write your student number on every page.
6. This exam contains 12 pages. Check to see if any pages are missing.
7. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
8. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
9. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
10. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam **120** dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **4** tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
5. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
6. Sınav 12 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
7. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
8. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
9. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
10. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	TOPLAM
25	25	25	25	25	100

Notation:

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \{a = (a_j)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \|a\|_p < \infty\}$$
$$\|a\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|a\|_\infty = \sup_j |a_j|$$

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous }\}$$
$$C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ and } f' \text{ are continuous }\}$$
$$C^\infty([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \tfrac{d^n f}{dx^n} \text{ exists and is continuous } \forall n\}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
$$\|f\|_{\infty,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$$\mathcal{L}^2_{cont}([a,b]) = \big(C([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\big)$$
$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\ dx$$

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{A : X \to Y : A \text{ is linear and bounded}\}$$
$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$$
$$\mathcal{K}(X,Y) = \{A : X \to Y : A \text{ is linear and compact}\}$$
$$\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,X)$$

$$\overline{x+iy} = x - iy$$
$$A^* = \text{adjoint of } A$$
$$\text{Ker}(A) = \text{kernal of } A = \{f \in X : Af = 0\}$$
$$\text{Ran}(A) = \text{range of } A = \{Af : f \in X\}$$
$$M^\perp = \text{orthogonal complement of } M$$

$$X^* = \text{dual space of } X$$
$$X^{**} = \text{double dual space of } X$$

$$\ell^p(\mathbb{N})^* \cong \ell^q(\mathbb{N}) \qquad 1 \le p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
$$\ell^\infty(\mathbb{N})^* \ncong \ell^1(\mathbb{N})$$
$$\delta_j^n = \begin{cases} 1 & n = j \\ 0 & n \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle f, u_j\rangle|^2 \le \|f\|^2 \qquad \text{Bessel's Inequality } (\{u_j\} \text{ orthonormal})$$

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q \qquad \text{Hölder's Inequality } (\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1)$$

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\| \, \|g\| \qquad \text{Cauchy-Schwarz Inequality}$$

Soru 1 (Hilbert-Schmidt Operators) Let X be a Hilbert space.

(a) [1p] Please write your student number on every page.

(b) [3p] Give the definition of the *Hilbert-Schmidt norm* of an operator.

(c) [3p] Give the definition of $\mathcal{J}_2(X)$, the space of *Hilbert-Schmidt operators*.

Now consider the Hilbert space $\ell^2(\mathbb{N})$. Let $a = (a_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ be a sequence. Define an operator $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ by

$$Ax_j = a_j x_j.$$

[For example: If $a = (3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, \ldots)$ then $A(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (3x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots)$. If $a = (1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ then $A(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_1, 0, 0, 0, \ldots)$.]

(d) [1p] Does $\{\delta^n\}_{n=1}^\infty$ form an orthonormal basis for $\ell^2(\mathbb{N})$?

☐ Yes ☐ No.

(e) [17p] Show that

$$a \in \ell^2(\mathbb{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ is a Hilbert-Schmidt operator.}$$

Soru 2 (Finite Rank Operators)

(a) [3p] Give the definition of the *rank* of an operator.

(b) [2p] Give the definition of a *finite rank* operator.

Define an operator $B : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ by

$$B(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots) := (x_2, x_4, x_2, x_4, x_2, x_4, \ldots).$$

(c) [5p] Calculate $\operatorname{rank}(B)$.

Now suppose that

- X is a Hilbert space;
- $A : X \to X$ is a finite rank operator; and
- $A^* : X \to X$ is the adjoint of A.

(d) [15p] Show that A^* is a finite rank operator.

Soru 3 (The Fredholm Alternative) Let X be a Hilbert space.

(a) [5p] Give the definition of the *orthogonal complement* of a set $M \subseteq X$.

Recall Theorem 5.10. You may assume that this theorem is true.

Theorem 5.10 *Suppose* $K \in \mathcal{K}(X)$. *Then*

$$\dim \operatorname{Ker}(1-K) = \dim \operatorname{Ran}(1-K)^{\perp} < \infty.$$

(b) [20p] Suppose that $K \in \mathcal{K}(X)$. Show that either

- the inhomogeneous equation
$$f = Kf + g$$
has a unique solution for every $g \in X$;

or

- the corresponding homogeneous equation
$$f = Kf$$
has a nontrivial solution.

(This famous result is called the *Fredholm Alternative*. It is named after the Swedish mathematician *Erik Ivar Fredholm*, 1866-1927.)

Soru 4 (Weak Convergence) Let X be a Banach space.

(a) [5p] Give the definition of *weak convergence* of a sequence of vectors in X.

Now suppose that

- $l_j \in X^*$ for all $j \in J$;
- $\{l_j\}_{j\in J}$ is total in X^*.

(b) [5p] Show that

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longrightarrow \qquad x_n \text{ is bounded and } l_j(x_n) \to l_j(x) \text{ for all } j.$$

It is also true that

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longleftarrow \qquad x_n \text{ is bounded and } l_j(x_n) \to l_j(x) \text{ for all } j,$$

but I am not asking you to prove this. Perhaps this is a hint for part (c).

(c) [15p] Show that

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \not\Leftarrow \qquad l_j(x_n) \to l_j(x) \text{ for all } j.$$

[HINT: Maybe consider $X = \ell^2(\mathbb{N})$ for your counterexample? You know that $\ell^2(\mathbb{N})^* \cong \ell^2(\mathbb{N})$.]

Soru 5 (Odds and Sods)

(a) [3p] Give the definition of the *graph* of an operator.

(b) [2p] Give the definition of a *closed* operator.

(c) [8p] Give an example of a closed operator. Prove that your operator is closed.

(d) [5p] Give the definition of a *reflexive* space.

(e) [7p] Show that every Hilbert space is reflexive.