OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2017–05–23, 13:10–15:10 **MAT462 Fonksiyonel Analiz II – Final Sınavı** N. Course

ADI: ÖRNEKTİR
SOYADI: SAMPLE
ÖĞRENCİ NO:
İMZA:

Süre: **120** dk.

Sınav sorularından **4** tanesini seçerek cevaplayınız.

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have **120** minutes to answer **4** questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You must answer in English.
4. You must show your working for all questions.
5. This exam contains 12 pages. Check to see if any pages are missing.
6. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
7. Switch your mobile phone off and seal it in the envelope provided. Do not open your envelope until the exam is finished or you have left the room.
8. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
9. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
10. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam **120** dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **4** tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce veriniz.
4. Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
5. Sınav 12 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
6. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
7. Cep telefonunuzu kapatınız ve size verilen zarfın içine koyunuz. Zarfı, sınav süresi bitene kadar ya da sınav salonundan çıkana kadar açmayınız.
8. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
9. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
10. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	TOPLAM
25	25	25	25	25	100

Soru 1 (Closed and Closable Operators)

(a) [5p] State the *Closed Graph Theorem*

(b) [5p] Give the definition of a *closable operator*.

(c) [1p] Please write your student number at the top-right of this page.

Now suppose that

- A is a closable operator;
- $\overline{A}$ denotes the closure of A; and
- $\overline{A}$ is injective.

(d) [14p] Show that $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

Soru 2 (The Hahn-Banach Theorem and Reflexivity) Let X be a Banach space. Consider the map $J : X \to X^{**}$ defined by $J(x)(l) = l(x)$.

Note that in the formula $J(x)(l) = l(x)$, we have $x \in X$.

(a) [2p] In the formula $J(x)(l) = l(x)$, what set is l in?

(b) [2p] In the formula $J(x)(l) = l(x)$, what set is $J(x)$ in?

(c) [2p] In the formula $J(x)(l) = l(x)$, what set is $J(x)(l)$ in?

(d) [3p] Give the definition of a *reflexive space*.

(e) [5p] Show that J is injective.

(f) [1p] Please write your student number at the top-right of this page.

(g) [5p] Show that $\|J(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$ for all $x \in X$.

(h) [5p] Show that $\|J(x)\|_{X^{**}} \geq \|x\|_X$ for all $x \in X$.

Soru 3 (Weak Convergence.) [25p] Please write two pages about *weak convergence.*

Soru 4 (The Baire Category Theorem and its Applications)

(a) [5p] Give the definition of a *nowhere dense* set.

(b) [7p] Give an example of a non-empty, nowhere dense set. You must prove that your set is nowhere dense.

(c) [5p] State the Open Mapping Theorem

Theorem (The Inverse Mapping Theorem) *Let $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ be a bounded linear bijection between Banach spaces. Then A^{-1} is continuous.*

(d) [8p] Prove the Inverse Mapping Theorem.
[HINT: Use the Open Mapping Theorem.]

Soru 5 (Hilbert-Schmidt Operators)

(a) [5p] Give the definition of the *Hilbert-Schmidt norm* and the definition of a *Hilbert-Schmidt operator*

Now consider the operator $K : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell 2(\mathbb{N})$ defined by

$$(Kf)_n = \sum_{j=1}^{\infty} k_{n+j} f_j$$

where $k_j \in \mathbb{C}$ for all $j \in \mathbb{N}$. If this is unclear, I mean that

$$Kf = K(f_1, f_2, f_3, \ldots) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} k_{1+j} f_j, \sum_{j=1}^{\infty} k_{2+j} f_j, \sum_{j=1}^{\infty} k_{3+j} f_j, \ldots \right).$$

Define a positive real number by

$$\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} j \left| k_{j+1} \right|^2.$$

(b) [20p] Show that

$$K \text{ is a Hilbert-Schmidt operator} \qquad \iff \qquad \lambda < \infty$$

and show that $\|K\|_2 = \sqrt{\lambda}$ in this case.

Notation:

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \{a = (a_j)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \|a\|_p < \infty\}$$
$$\|a\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|a\|_\infty = \sup_j |a_j|$$

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous }\}$$
$$C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ and } f' \text{ are continuous }\}$$
$$C^\infty([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \tfrac{d^n f}{dx^n} \text{ exists and is continuous } \forall n\}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
$$\|f\|_{\infty,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$$\mathcal{L}^2_{cont}([a,b]) = \big(C([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\big)$$
$$\langle f,g\rangle_{L^2} = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\;dx$$

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{A : X \to Y : A \text{ is linear and bounded}\}$$
$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$$
$$\mathcal{K}(X,Y) = \{A : X \to Y : A \text{ is linear and compact}\}$$
$$\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,X)$$

$$\overline{x+iy} = x - iy$$
$$A^* = \text{adjoint of } A$$
$$\mathrm{Ker}(A) = \text{kernal of } A = \{f \in X : Af = 0\}$$
$$\mathrm{Ran}(A) = \text{range of } A = \{Af : f \in X\}$$
$$M^\perp = \text{orthogonal complement of } M$$

$$X^* = \text{dual space of } X$$
$$X^{**} = \text{double dual space of } X$$

$$\ell^p(\mathbb{N})^* \cong \ell^q(\mathbb{N}) \qquad 1 \le p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
$$\ell^\infty(\mathbb{N})^* \ncong \ell^1(\mathbb{N})$$
$$\delta_j^n = \begin{cases} 1 & n = j \\ 0 & n \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle f, u_j\rangle|^2 \le \|f\|^2 \qquad \text{Bessel's Inequality } (\{u_j\} \text{ orthonormal})$$

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q \qquad \text{Hölder's Inequality } (\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1)$$

$$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\,\|g\| \qquad \text{Cauchy-Schwarz Inequality}$$