OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2017.03.28 **MAT462 Fonksiyonel Analiz II – Arasınav** N. Course

ADI:
SOYADI:
ÖĞRENCİ NO:
İMZA:

Süre: **60** dk.

Sınav sorularından **2** tanesini seçerek cevaplayınız.

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have **60** minutes to answer **2** questions from a choice of 3. If you choose to answer more than 2 questions, then only your best 2 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You must show your working for all questions.
5. Write your student number on every page.
6. This exam contains 8 pages. Check to see if any pages are missing.
7. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
8. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
9. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
10. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam **60** dakikadır. Sınavda 3 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **2** tanesini seçerek cevaplayınız. 2'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 2 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
5. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
6. Sınav 8 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
7. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
8. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
9. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
10. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	TOPLAM
/50	/50	/50	/100

Soru 1 (Closed Operators)

(a) [10p] Give the definition of a *closed* operator

Now let $X = Y = \ell^2(\mathbb{N})$ with the norm $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Consider the operator $T : \mathcal{D}(T) \to \ell^2(\mathbb{R})$ where

$$\mathcal{D}(T) := \left\{a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) : (ja_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})\right\} \subseteq \ell^1(\mathbb{N}) \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$$

and

$$Tx := \|x\|_1 \delta^1 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\right).$$

For example, if $x = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{j^2}, \ldots\right)$ then $Tx = \left(\frac{\pi^2}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\right)$ because $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

HINT 1: We proved in class that $\mathcal{D}(T)$ is a closed set – you may assume this.
HINT 2: You may also assume without proof that $\mathcal{D}(T)$ satisfies the following property:

$$(a^n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(T) \text{ and } a^n \to 0 \implies \|a^n\|_1 \to 0.$$

(b) [10p] Use hint 2 to prove that if $(a^n) \subseteq \mathcal{D}(T)$, then

$$a^n \to a \implies \|a^n\|_1 \to \|a\|_1.$$

(c) [1p] Please write your student number on this page.

(d) [7p] Show that if (a^n, Ta^n) is a Cauchy sequence in $\Gamma(T)$, then a^n is convergent in $\mathcal{D}(T)$.

(e) [22p] Show that T is a closed operator.

Soru 2 (The Hahn-Banach Theorem)

(a) [10p] This course is called Functional Analysis/Fonksiyonel Analiz: What is a *functional*?

Now let $X = \ell^\infty(\mathbb{N})$ with the norm $\|x\|_\infty = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$. Consider the subspace

$$\mathfrak{c}(\mathbb{N}) := \left\{ a = (a_j)_{j=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \text{ exists} \right\} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$$

and the function $L : \mathfrak{c}(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

(b) [8p] Show that if $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ is a convergent sequence in $\mathbb{C}$, then $x \in \mathfrak{c}(\mathbb{N})$ and $L(x) = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$.

(c) [8p] Show that if $y \in \mathfrak{c}(\mathbb{N})$ then

$$L(Sy) = L(y)$$

where $(Sy)_n = y_{n+1}$ is the shift operator.

(d) [8p] Show that the function $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \|x\|_\infty$ is a convex function.

(e) [16p] Show that L can be extended to all of $\ell^\infty(\mathbb{N})$ such that

(i) L is linear; and

(ii) $|L(x)| \leq \|x\|_\infty$

for all $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Soru 3 (Strong Convergence of Operators) Let X and Y be Banach spaces. Let $A_n : X \to Y$ be a sequence of operators and let $A : X \to Y$ be an operator.

(a) [10p] Give the definition of *strong convergence* of A_n.

(b) [14p] Show that strong limits are unique. (Show that if $A = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} A_n$ and $\tilde{A} = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} A_n$ then $A = \tilde{A}$.)

Now suppose that

- $A_n, A \in \mathcal{B}(X, Y)$;
- $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} A_n = A$;
- $x_n, x \in X$; and
- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$;

(c) [13p] Show that if $\|A_n\| \leq C$ for all n, then $\lim_{n\to\infty} A_n x_n = Ax$.

(d) [13p] Show that $\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$.

Notation:

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \{a = (a_j)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \|a\|_p < \infty\}$$
$$\|a\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|a\|_\infty = \sup_j |a_j|$$

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous }\}$$
$$C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ and } f' \text{ are continuous }\}$$
$$C^\infty([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \tfrac{d^n f}{dx^n} \text{ exists and is continuous } \forall n\}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
$$\|f\|_{\infty,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$$\mathcal{L}^2_{cont}([a,b]) = \big(C([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\big)$$
$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\ dx$$

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{A : X \to Y : A \text{ is linear and bounded}\}$$
$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$$
$$\mathcal{K}(X,Y) = \{A : X \to Y : A \text{ is linear and compact}\}$$
$$\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X,X)$$

$$\overline{x+iy} = x - iy$$
$$A^* = \text{adjoint of } A$$
$$\mathrm{Ker}(A) = \text{kernal of } A = \{f \in X : Af = 0\}$$
$$\mathrm{Ran}(A) = \text{range of } A = \{Af : f \in X\}$$
$$M^\perp = \text{orthogonal complement of } M$$

$$X^* = \text{dual space of } X$$
$$X^{**} = \text{double dual space of } X$$

$$\ell^p(\mathbb{N})^* \cong \ell^q(\mathbb{N}) \qquad 1 \le p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
$$\ell^\infty(\mathbb{N})^* \ncong \ell^1(\mathbb{N})$$
$$\delta_j^n = \begin{cases} 1 & n = j \\ 0 & n \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle f, u_j\rangle|^2 \le \|f\|^2 \qquad \text{Bessel's Inequality } (\{u_j\} \text{ orthonormal})$$

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q \qquad \text{Hölder's Inequality } (\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1)$$

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\| \qquad \text{Cauchy-Schwarz Inequality}$$