Your Name / İsim Soyisim

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci Numarası

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Fazla kağıt ihtiyacınız olursa, boş yerleri kullanabilirsiniz.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 80 dakika.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Puanınız
1	20	
2	15	
3	20	
4	25	
5	20	
Toplam	100	

1. (a) 10 puan A matrisi, $A^2+5A-2I=0$ denklemini sağlayan kare bir matris ise $A^{-1}=\frac{1}{2}(A+5I)$ olduğunu gösteriniz.

Solution: Eğer $AB=BA=I$ olacak şekilde bir B matrisi mevcut ise B matrisine, A matrisinin tersi denir. Ayrıca A matrisi $A^2+5A-2I=0$ denklemini sağladığından $I=\frac{1}{2}(A^2+5A)$'dır.

$$\frac{1}{2}(A+5I).A=\frac{1}{2}(A^2+5A)=I$$
$$A.\frac{1}{2}(A+5I)=\frac{1}{2}(A^2+5A)=I$$

$A^{-1}=\frac{1}{2}(A+5I)$ matrisi A matrisinin tersidir.

(b) 10 puan $A=\begin{bmatrix}2&6&-8\\0&5&3\\4&7&9\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2&6&-8\\0&5&3\\0&-5&25\end{bmatrix}$ olmak üzere $EA=B$ olacak şekilde E elementer matrisini bulunuz.

Solution: A matrisi ile B matrisi satırca denk matrislerdir.

$$A=\begin{bmatrix}2&6&-8\\0&5&3\\4&7&9\end{bmatrix}\underset{R_3-2R_1}{\rightarrow}\begin{bmatrix}2&6&-8\\0&5&3\\0&-5&25\end{bmatrix}=B$$
$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow EA=B$$

olur.

2. $\boxed{\text{15 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\det A = (-4)$ olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer denklem sistemi verilsin. Cramer Metodunu kullanarak x_3 değişkeninin değerini bulunuz.

Solution: A matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan Cramer metodu kullanılabilir. Buna göre $x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|}$'dir.

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-8}{-4} = 2$$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi ile $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi benzer matrislerdir.

(a) $\boxed{\text{6 puan}}$ A matrisinin determinantını bulunuz.

(b) $\boxed{\text{8 puan}}$ A matrisinin özdeğerleri nelerdir?

(c) $\boxed{\text{6 puan}}$ A matrisinin sıfırlılığını ve rankını bulunuz.

Solution: A matrisi ile D matrisi benzer matrisler olduğundan determinantları, özdeğerleri, sıfırlılığı ve rankları aynıdır.

(a) $|A| = |D| = 6.5.0.0.0 = 0$

(b) D matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 5$ ve $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$'dır. Dolayısıyla A matrisinin özdeğerleri de $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 5$ ve $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ olur.

(c) D matrisinin indirgenmiş eşelon formu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir. İndirgenmiş matrisin sadece iki satırı sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, rankı 2, sıfırlılığı ise 3'dür. Benzer matrisler olduğundan A matrisinin de rankı 2, sıfırlılığı ise 3 olur.

4. $T : P_3 \to P_2$, $T(p(x)) = 2p'(x) - p''(x)$ olarak tanımlanan bir dönüşüm olsun.

   (a) $\boxed{\text{5 puan}}$ T dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

   (b) $\boxed{\text{5 puan}}$ Dönüşümün matrisini standart baza göre bulunuz.

   (c) $\boxed{\text{8 puan}}$ $\ker T$ $(NullA)$ için bir baz bulunuz.

   (d) $\boxed{\text{7 puan}}$ Dönüşümün görüntü uzayının bir bazını bulunuz.

Solution: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alalım. $p(x)$ polinomunun ve görüntüsünün standart baza göre koordinatları

$$T(p(x)) = 2(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) - (2a_2 + 6a_3x) = (2a_1 - 2a_2) + (4a_2 + 6a_3)x + 6a_3x^2$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 - 2a_2 \\ 4a_2 + 6a_3 \\ 6a_3 \end{bmatrix}$$

olur.

(a) P_3 uzayından $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ ve $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ iki polinom ve $k \in \mathbb{R}$ alalım.

$$T(p(x)+q(x)) = T\left(\begin{bmatrix} a_0+b_0 \\ a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1+2b_1-2a_2-2b_2 \\ 4a_2+4b_2+6a_3+6b_3 \\ 6a_3+6b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1-2a_2 \\ 4a_2+6a_3 \\ 6a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_1-2b_2 \\ 4b_2+6b_3 \\ 6b_3 \end{bmatrix} = T(p(x)) + T(q(x))$$

$$T(kp(x)) = T\left(\begin{bmatrix} ka_0 \\ ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2ka_1-2ka_2 \\ 4ka_2+6ka_3 \\ 6ka_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2a_1-2a_2 \\ 4a_2+6a_3 \\ 6a_3 \end{bmatrix} = kT(p(x))$$

Dolayısıyla dönüşüm lineerdir.

(b) $T\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1-2a_2 \\ 4a_2+6a_3 \\ 6a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dolayısı ile $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denklem sisteminin çözüm uzayının bir bazı $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

olur ve $p_1(x) = 1$ polinomu $\ker T$'nin bir bazıdır.

(d) $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} q_1(x) & = & 2 \\ q_2(x) & = & -2+4x \\ q_3(x) & = & 6x+6x^2 \end{array}$ polinomları, dönüşümün görüntü uzayının bir bazıdır.

5. $\boxed{\text{20 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin $\lambda_1 = -2$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri sırası ile $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$'dir. A matrisini **ortogonal** köşegenletiren ve $Q^T Q = I$ olacak şekildeki Q matrisini bulunuz.

Solution: Q matrisi, A matrisinin ortanormal özvektörlerinden oluşur. Verilen özvektörler ortanormal hale getirilmelidir.

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{||u_1||^2} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{3} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{< v_3, u_1 >}{||u_1||^2} u_1 - \frac{< v_3, u_2 >}{||u_2||^2} u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{0}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

u_1, u_2 ve u_3 vektörleri ortogonaldir.

$$q_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{u_2}{||u_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{u_3}{||u_3||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektörleri ise ortanormaldir. $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$