Your Name / İsim Soyisim

Your Signature / İmza

Student ID # / Öğrenci Numarası

Professor's Name / Öğretim Üyesi

Your Department / Bölüm

- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Fazla kağıt ihtiyacınız olursa, boş yerleri kullanabilirsiniz.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 80 dakika.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Puanınız
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	
Toplam	100	

1. (a) 10 puan $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formundaki vektörlerin kümesi V olsun. V kümesi, $\mathbb{R}^3$'ün altuzayı mıdır? Neden?

Solution: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörleri V kmesinin iki eleman ve k bir sabit sayı olmak üzere

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+v \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \notin V \Rightarrow V \text{kümesi} \mathbb{R}^3 \text{ ' ün bir altuzayı degildır.}$$

(b) 10 puan a, b, c birer reel sayı ve $c = a - b$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ formundaki vektörlerin kümesi W olsun. W, $\mathbb{R}^3$'ün altuzayı mıdır? Neden?

Solution: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix}$ vektörleri W kmesinin iki eleman ve k bir sabit sayı olmak üzere

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_1-u_2+v_1-v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \end{bmatrix} \in W$$

$$k\mathbf{u} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ k(u_1-u_2) \end{bmatrix} \in W$$

W kümesi $\mathbb{R}^3$'ün bir altuzayıdır.

2. $\boxed{\text{20 puan}}$ $\mathbf{p}_1(x) = 2 - x + 4x^2, \mathbf{p}_2(x) = 3 + 6x + 2x^2, \mathbf{p}_3(x) = -15x + 8x^2$ olmak üzere $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ kümesi en fazla ikinci dereceden polinomların vektör uzayının bir altkümesi olsun. Verilen küme lineer bağımlı mıdır? Eğer lineer bağımlı ise bağımlılık ilişkisini yazınız.

Solution: Verilen polinomların lineer bağımlı olup olmadığını anlamak için $c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + c_3\mathbf{p}_3 = 0$ denklem sistemini çözmeliyiz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 15 & -30 & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 0 \\ 0 & 26 & -52 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 26 & -52 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$c_2 - 2c_3 = 0 \text{ ve } c_1 - 6c_2 + 15c_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

bulunur. Verilen polinomlar lineer bağımlıdır. $t = 1$ alırsak aralarındaki ilişki $-3\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$ olarak bulunur.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $\boxed{\text{14 puan}}$ A matrisinin sıfır uzayı için bir baz bulunuz.

(b) $\boxed{\text{6 puan}}$ A matrisinin sıfırlılığını ve rankını bulunuz.

Solution:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_2 + x_3 + \dfrac{4}{7}x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -p - 4k, x_3 = p, x_4 = 7k$

$\Rightarrow x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4(-p-4k) - 5p - 2(7k) = -p + 2k$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p+2k \\ -p-4k \\ p \\ 7k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} k$$

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denklem sisteminin çözüm uzayı için bir bazdır. Dolayısıyla A'nın sıfır uzayının da bir bazıdır.

(b) A matrisinin sıfırlılığı, sıfır uzayının boyutudur. Dolayısı ile $Null(A) = 2$'dir.

$$Null(A) + Rank(A) = A\text{'nın sütun sayısı}$$

olduğundan $Rank(A) = 4 - 2 = 2$ bulunur.

4. $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ olmak üzere $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ kümeleri $\mathbb{R}^2$'nin iki bazı olsunlar.

   (a) $\boxed{\text{7 puan}}$ $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$ vektörünün B bazına göre koordinatlarını bulunuz.

   (b) $\boxed{\text{8 puan}}$ B bazından S bazına geçiş matrisi olan $P_{B\to S}$ matrisini bulunuz.

   (c) $\boxed{\text{5 puan}}$ $\mathbf{w}$ vektörünün S bazına göre koordinatlarını geçiş matrisi yardımıyla bulunuz.

Solution: $B = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{bmatrix}$ alalım.

(a) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$ vektörünün B bazına göre koordinatları, $[\mathbf{w}]_B$, $B[\mathbf{w}]_B = \mathbf{w}$ denklem sisteminin çözüm kümesidir.

$$[\mathbf{w}]_B = B^{-1}\mathbf{w} = \frac{1}{3-4}\begin{bmatrix}3 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-15\\9\end{bmatrix}$$

(b) B bazından S bazına geçiş matrisi, $P_{B\to S} = S^{-1}B$ hesaplanılarak veya $[S|B]$ matrisi ile $[\,I\,|P_{B\to S}]$ matrisinin denk matrisler olmasından yararlanılarak bulunur.

$$S^{-1} = \frac{1}{4-3}\begin{bmatrix}4 & -1\\-3 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow P_{B\to S} = S^{-1}B = \begin{bmatrix}4 & -1\\-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 5\\-1 & -3\end{bmatrix}$$

or

$$[S|B] = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 2\\3 & 4 & 2 & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 2\\0 & 1 & -1 & -3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & 5\\0 & 1 & -1 & -3\end{array}\right] = [\,I\,|P_{B\to S}]$$

(c) $[\mathbf{w}]_S = P_{B\to S}[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix}2 & 5\\-1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-15\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15\\-12\end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $\boxed{\text{6 puan}}$ A matrisinin özdeğerlerini bulunuz .

(b) $\boxed{\text{9 puan}}$ A matrisinin özvektörlerini bulunuz.

(c) $\boxed{\text{5 puan}}$ A matrisini köşegenleştirilebilir mi? Öyle ise P matrisini bulunuz.

Solution:

(a) $|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(4-\lambda)-2\right] = (1-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) = 0$

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ olarak bulunur.

(b) A matrisinin özvektörlerini bulmak için $(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ homojen denklem sistemini çözmeliyiz.

$$\lambda_1 = 5 \Rightarrow (A-5I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow (A-2I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow (A+2I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$