ADI: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

SOYADI: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

ÖĞRENCİ NO: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐

BÖLÜM: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ Mehmet Kavuk ☐ Hasan Özekes

İMZA:

- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Fazla kağıt ihtiyacınız olursa, boş yerleri kullanabilirsiniz.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Sınav süresi 80 dakika.

Yandaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
Toplam	100	

1. 25 puan $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ hesaplayınız.

Solution:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-7)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-7)(-6)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (-7)(-6)(+5)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-7)(-6)(+5)(4-6) = -420.$$

2. $\boxed{\text{25 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Solution:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 + 3R_1 \to R_2$ ve $R_3 - 2R_1 \to R_3$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 + 3R_2 \to R_3$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{2}R_3 \to R_3$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$R_2 + 2R_3 \to R_2$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$R_1 + 2R_3 \to R_1$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Böylece $A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. $\boxed{\text{25 puan}}$ Aşağıdaki denklem sistemini ele alalım.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

a. Bu lineer sistemin ilaveli matrisini yazınız.
b. Matrisinizi indirgenmiş satır eşelon forma getiriniz.
c. Bu lineer sistemin (eğer varsa) tüm çözümlerini bulunuz. Eğer sistemin çözümü yok ise nedenini açıklayınız.

Solution:

a.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

b. $R_4 + 2R_1 \to R_4$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}R_2 \to R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_4 - 3R_2 \to R_4$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_4 + R_3 \to R_4$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 - R_3 \to R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Lineer denklem sisteminin çözümü her $s \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} x_1 &= 2s - 3 \\ x_2 &= 3s - 1 \\ x_3 &= 1 - 3s \\ x_4 &= s \end{aligned}$$

şeklindedir.

4. $\boxed{\text{25 puan}}$ a. A, B ve C matrisleri $n \times n$ tersinir matrisler ise,

$$C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$$

denklem sisteminin bir çözümü ,X, var mıdır? Eğer varsa bulunuz.

b. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$ olduğunu kabul edelim. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ve $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ değerlerini hesaplayınız.

Solution:

a. Bu denklemin çözümü olan bir X vardır ve aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$\begin{aligned} C^{-1}(A+X)B^{-1} &= I_n \\ CC^{-1}(A+X)B^{-1} &= CI_n \\ I_n(A+X)B^{-1} &= C \\ (A+X)B^{-1} &= C \\ (A+X)B^{-1}B &= CB \\ (A+X)I_n &= CB \\ A+X &= CB \\ X &= CB-A \end{aligned}$$

b. Öncelikle

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -7$$

olur çünkü matrisin iki satırının yerlerini değiştirmek determinantını -1 ile çarpar.

Bir satırı bir k sabitiyle çarpmak, determinanti da k ile çarpar. Dolayısıyla

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 14.$$

Bir satırı başka bir satıra eklemek determinantın değerini değiştirmediğinden

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 14$$

elde ederiz.