ADI:

SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BÖLÜM:

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ M.Tuba Gülpınar ☑ Hasan Özekes

İMZA:

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	20	
3	30	
4	25	
Toplam	100	

- Sınav süresi 90 dakika.
- Sınavda kopya çeken, kopya veren, kopya çekme girişiminde bulunan öğrenci, o sınavdan sıfır (0) not almış sayılır ve hakkında "Yükseköğretim Kurumları "Öğrenci Disiplin Yönetmeliği" 'nin ilgili hükümleri uyarınca "Disiplin Soruşturması" açılır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- $\boxed{\text{Cevabınızı kutu}}$ içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. (a) $\boxed{10 \text{ puan}}$ $W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin $\mathbb{R}^4$ için bir baz olup olmadığını belirleyiniz.

Solution: W kümesi lineer bağımsız küme olmalıdır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -8 \\ 2 & -3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -8 & -5 \\ 0 & -3 & 12 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektörler lineer bağımlı olduğundan W kümesi $\mathbb{R}^4$ için bir baz değildir.

(b) $\boxed{15 \text{ puan}}$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$ ise $\begin{vmatrix} g & h & i \\ -3d+2a & -3e+2b & -3f+2c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$ determinantının değerini hesaplayınız.

Solution:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \begin{vmatrix} g & h & i \\ -3d & -3e & -3f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = (-3)(2)(-3) \Rightarrow \begin{vmatrix} g & h & i \\ -3d+2a & -3e+2b & -3f+2c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 18$$

2. $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b \\ 2a+b-2c+d \\ 6b-4c-2d \end{bmatrix}$ ile tanımlansın.

(a) $\boxed{\text{5 puan}}$ T'nin matris gösterilimini yazınız.

Solution:

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b \\ 2a+b-2c+d \\ 6b-4c-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{\text{7 puan}}$ T'nin çekirdeği için bir baz bulunuz.

Solution:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = 0, \qquad 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \qquad x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} x_2$$

(c) $\boxed{\text{5 puan}}$ T'nin görüntüsü için bir baz bulunuz.

Solution: Birinci, ikinci ve dördüncü sütunlar pivot eleman içerir. Dolayısıyla A matrisinin birinci, ikinci ce dördüncü sütunları bir baz oluşturur.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) $\boxed{\text{3 puan}}$ T'nin rankını bulunuz.

Solution: Rank T =3

3. (a) $\boxed{\text{15 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

Solution:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4+3i, \lambda_2 = 4-3i$$

$$(A - (4+3i)I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-(4+3i) & 3 \\ -3 & 4-(4+3i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3i & 3 \\ -3 & -3i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3i & 3 \\ -3i & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 4 - 3i$ özdeğerine karşılık gelen özvektör ise $\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ olur.

(b) $\boxed{\text{15 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ise A^k değerini bulunuz.

Solution: $A^k = PD^kP^{-1}$ olduğu kullanılarak hesaplanabilir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ 'dir.

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^k = PD^kP^{-1} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ Özdeğerleri $\lambda_1 = -2$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 7$ olan $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özvektörlerini bulunuz.

Solution:

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow (A+2I)\mathbf{v_1} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 7 \Rightarrow (A-7I)\mathbf{v_2} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matrisinin $\lambda_1 = -2$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 7$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri sırasıyla $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectively.

(b) $\boxed{\text{15 puan}}$ $A = QDQ^T$ olacak şekilde A matrisini orthogonal köşegenleştiren Q matrisini bulunuz.

Solution: Öncelikle A matrisinin özvektörlerini Gram Schmidt kullanarak ortanormal hale getirelim.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \frac{<\mathbf{v_2}, \mathbf{u_1}>}{<\mathbf{u_1}, \mathbf{u_1}>}\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{0}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} - \frac{<\mathbf{v_3}, \mathbf{u_1}>}{<\mathbf{u_1}, \mathbf{u_1}>}\mathbf{u_1} - \frac{<\mathbf{v_3}, \mathbf{u_2}>}{<\mathbf{u_2}, \mathbf{u_2}>}\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_1} = \frac{\mathbf{u_1}}{||\mathbf{u_1}||} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \frac{\mathbf{u_2}}{||\mathbf{u_2}||} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_3} = \frac{\mathbf{u_3}}{||\mathbf{u_3}||} = \frac{5}{3\sqrt{5}}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$