Adı:

Soyadı:

Öğrenci No:

Bölüm:

Öğr. Üyesi: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ M.Tuba Gülpınar ☑ Hasan Özekes

İmza:

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
Toplam	100	

- Sınav süresi 70 dakika.
- Sınavda kopya çeken, kopya veren, kopya çekme girişiminde bulunan öğrenci, o sınavdan sıfır (0) not almış sayılır ve hakkında "Yükseköğretim Kurumları "Öğrenci Disiplin Yönetmeliği" 'nin ilgili hükümleri uyarınca "Disiplin Soruşturması" açılır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- Cevabınızı kutu içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. 25 puan $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-3\\3\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ vektörlerinin gerdiği uzayın bir bazını bulunuz.

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&6&5&0\\0&1&-1&-3&3\\0&-1&2&3&-1\\1&1&-1&-4&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&6&5&0\\0&1&-1&-3&3\\0&-1&2&3&-1\\0&3&-7&-9&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&6&5&0\\0&1&-1&-3&3\\0&0&1&0&2\\0&0&-4&0&-8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&6&5&0\\0&1&-1&-3&3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

A matrisinin birinci, ikinci ve üçüncü sütunları lineer bağımsızdır. Dolayısıyla

$$\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-3\\3\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}=\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & -1 & 10 \\ -2 & 0 & -2 & 3 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ satırca denk matrisler olsunlar.

(a) $\boxed{\text{10 puan}}$ Nul A için bir baz bulunuz.

Solution: sistemin 6-3=3 parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

$$\begin{array}{c} x_4 - x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = x_5 \\ x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3 - x_5 - 2x_6 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 - x_5 - x_6 \end{array} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_5 - x_6 \\ -x_3 - x_5 - 2x_6 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_6$$

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi A'nın sıfır uzayı için bir baz oluşturur.

(b) $\boxed{\text{7 puan}}$ Col A için bir baz bulunuz.

Solution: B matrisinin birinici, ikinci ve dördüncü sütunları pivot elemanları içerir. Dolayısıyla A matrisinin birinici, ikinci ve dördüncü sütunları $ColA$ için bir baz oluşturur. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi Col A için bir bazdır.

(c) $\boxed{\text{8 puan}}$ A matrisinin rankını ve sıfırlılığını bulunuz.

Solution: Rank A= dim (Col A)= 3
Nullity = dim (Nul A)=3

3. $V = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ ve $W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ kümeleri $\mathbb{R}^3$'ün iki bazı olsunlar.

(a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörünün V bazına göre koordinatlarını bulunuz.

Solution:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$[\mathbf{v}]_V = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{\text{10 puan}}$ V'den W bazına geçiş matrisi olan $\underset{W \leftarrow V}{P}$ matrisini bulunuz.

Solution: $\underset{W\leftarrow V}{P} = W^{-1}V$, $[W|V] \sim \left[I|\underset{W\leftarrow V}{P}\right]$ veya $\underset{W\leftarrow V}{P} = \left[[\mathbf{v}_1]_W \quad [\mathbf{v}_2]_W \quad [\mathbf{v}_3]_W\right]$

$$[W|V] \sim \left[I|\underset{W\leftarrow V}{P}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & -11 & -9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -9 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -9 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 5 \end{array}\right]$$

$$\underset{W\leftarrow V}{P} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -8 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) $\boxed{\text{5 puan}}$ $\underset{W\leftarrow V}{P}$ matrisini kullanarak $\mathbf{v}$ vektörünün W bazına göre koordinatlarını bulunuz.

Solution:

$$[\mathbf{v}]_W = \underset{W\leftarrow V}{P}[\mathbf{v}]_V = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -8 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ bir lineer dönüşüm olsun. $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2y + 3z \\ x + y - 2z \\ 4x + y \\ 3x - y - z \end{bmatrix}$ olmak üzere L'nin matris gösterilimini bulunuz.

Solution:

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2y + 3z \\ x + y - 2z \\ 4x + y \\ 3x - y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{\text{15 puan}}$ $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$ olsun. T'nin çekirdeğinin bir bazı olan $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2$ polinomunu bulunuz.

Solution:

$$\ker T = \{\mathbf{p} : \mathbf{p} \in \mathbb{P}_2 \text{ ve } T(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{p}(t) = a + bt + ct^2 \Rightarrow T(\mathbf{p}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a + b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a = 0 \\ b + c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{p}(t) = -ct + ct^2$$

$$\ker T = \left\{\mathbf{p} : \mathbf{p}(t) = \left(-t + t^2\right) c, c \in \mathbb{R}\right\} = \text{Span}\left\{-t + t^2\right\}$$

$$\mathbf{p}(t) = -t + t^2$$