ADI:

SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BÖLÜM:

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ M.Tuba Gülpınar ☐ Hasan Özekes

İMZA:

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
Toplam	100	

- Sınav süresi 75 dakika.
- Sınavda kopya çeken, kopya veren, kopya çekme girişiminde bulunan öğrenci, o sınavdan sıfır (0) not almış sayılır ve hakkında "Yükseköğretim Kurumları "Öğrenci Disiplin Yönetmeliği" 'nin ilgili hükümleri uyarınca "Disiplin Soruşturması" açılır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- $\boxed{\text{Cevabınızı kutu}}$ içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

---

1. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Solution:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{\text{15 puan}}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\det B^4$ determinantını **kofaktör açılımı ve elemanter satır/sütun işlemleri yardımıyla** hesaplayınız

Solution:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)$$

$$\det B^4 = (\det B)^4 = (-2)^4 = 16$$

2. $T : P_3 \to P_2$ lineer bir dönüşüm olmak üzere $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a - b - c)x^2 + (2a - d)x + (b + c + d)$ olsun.

   (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ T lineer dönüşümünün standart matrisini bulunuz.

   (b) $\boxed{\text{15 puan}}$ T'nin çekirdeğinin bir bazını bulunuz.

Solution:

(a)

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - b - c \\ 2a - d \\ b + c + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ T'nin çekirdeği için bir baz oluşturur.

3. $\boxed{\text{25 puan}}$ $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ ve $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ V vektör uzayının iki bazı ve $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, ve $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$ olsun.

(a) $\mathcal{A}$ bazından $\mathcal{B}$ bazına geçiş matrisini bulunuz.

Solution:

$$[\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ olmak üzere $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ bulunuz

Solution:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. $\boxed{\text{25 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ olan bir matris olsun.

(a) A matrisinin özvektörlerini bulunuz.

Solution:

$$(A-3I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-6I)\mathbf{w} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $P^T = P^{-1}$ olmak üzere, A matrisini $A = PDP^T$ şeklinde ortogonal köşegenleştiren P ve D matrislerini yazınız.

Solution: A matrisinin ortonormal özdeğerlerini bulalım. $\lambda = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler ortogonal değildir. Gram-Schmidt yardımıyla dikleştirelim.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1>}{<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1>}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1/\sqrt{2}}{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{||\mathbf{w}||}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$