ADI:

SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BÖLÜM:

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ M.Tuba Gülpınar ☐ Hasan Özekes

İMZA:

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
Toplam	100	

- Sınav süresi 75 dakika.
- Sınavda kopya çeken, kopya veren, kopya çekme girişiminde bulunan öğrenci, o sınavdan sıfır (0) not almış sayılır ve hakkında "Yükseköğretim Kurumları "Öğrenci Disiplin Yönetmeliği" 'nin ilgili hükümleri uyarınca "Disiplin Soruşturması" açılır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- $\boxed{\text{Cevabınızı kutu}}$ içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

1. $\boxed{\text{25 puan}}$ k' nın hangi değerleri için $\begin{aligned} x+2y+6z&=2\\ y+2kz&=0\\ kx+2z&=1\end{aligned}$ denklem sisteminin

(a) çözümü yoktur?

(b) sonsuz çözümü vardır?

(c) tek çözümü vardır?

Solution:

$$\begin{bmatrix}1&2&6&2\\0&1&2k&0\\k&0&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&6&2\\0&1&2k&0\\0&-2k&2-6k&1-2k\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&6&2\\0&1&2k&0\\0&0&4k^2-6k+2&1-2k\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&6&2\\0&1&2k&0\\0&0&2(2k-1)(k-1)&1-2k\end{bmatrix}$$

Eğer $k=1$ ise $\begin{bmatrix}1&2&6&2\\0&1&2&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$ elde edilir. Denklem sisteminin çözümü yoktur.

Eğer $k=\frac{1}{2}$ ise $\begin{bmatrix}1&2&6&2\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ elde edilir. Denklem sisteminin bir parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

Eğer $k\neq 1$ ve $k\neq\frac{1}{2}$ ise $\begin{bmatrix}1&2&6&2\\0&1&2k&0\\0&0&1&-\frac{1}{2(k-1)}\end{bmatrix}$ elde edilir. Sistemin tek çözümü vardır.

2. (a) $\boxed{\text{15 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayınız.

Solution:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\left[(2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right] = (-4)(-8+4) = 16$$

(b) $\boxed{\text{10 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\det A = (-2)$ olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ olsun. Cramer kuralını kullanarak x_2'nin değerini hesaplayınız.

Solution:

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{16}{-2} = -8$$

3. (a) $\boxed{10 \text{ puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisini ($Adj A$) bulunuz.

Solution:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Adj A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{15 \text{ puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Solution: Birinci Yol:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

İkinci Yol:

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{array}\right]$$

4. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $n \times n$ A matrisi $A^2 - 2A + I = 0$ denklemini sağlasın. $A^3 = 3A - 2I$ olduğunu gösteriniz.

Solution:

$$A^2 = 2A - I \Rightarrow A^3 = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A = 3A - 2I$$

(b) $\boxed{\text{15 puan}}$ A, B ve C 3×3 matrisler olsun. $\det A = -3$, $\det B = 4$ ve $\det C = 2$. olmak üzere $\det(2A^2B^{-2}C^T)$ hesaplayınız.

Solution:

$$\det(2A^2B^{-2}C^T) = 2^3(\det A)^2\frac{1}{(\det B)^2}(\det C) = 8(-3)^2\frac{1}{4^2}2 = 9$$