ADI:

SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BÖLÜM:

ÖĞR. ÜYESİ: ☐ Neil Course ☐ Vasfi Eldem ☐ M.Tuba Gülpınar ☐ Hasan Özekes

İMZA:

Soru	Puan	Puanınız
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
Toplam	100	

- Sınav süresi 75 dakika.
- Sınavda kopya çeken, kopya veren, kopya çekme girişiminde bulunan öğrenci, o sınavdan sıfır (0) not almış sayılır ve hakkında "Yükseköğretim Kurumları "Öğrenci Disiplin Yönetmeliği" 'nin ilgili hükümleri uyarınca "Disiplin Soruşturması" açılır.
- Cevaplarınızı, aksi istenmedikçe, tam olarak (örneğin, $\frac{\pi}{3}$ veya $5\sqrt{3}$) yazınız.
- Hesap makinesi ve cep telefonunuzu kürsüye bırakınız.
- Bir sorudan tam puan alabilmek için, **işlemlerinizi açıklamak** zorundasınız. Bir cevapta "gidiş yolu" belirtilmemişse, sonucunuz doğru bile olsa, ya çok az puan verilecek ya da hiç puan verilmeyecek.
- $\boxed{\text{Cevabınızı kutu}}$ içine alınız.
- Kapak sayfasını **MAVİ tükenmez kalem** ile doldurunuz.
- Yukarıdaki tabloya hiçbir şey yazmayınız.

---

1. (a) $\boxed{\text{15 puan}}$ $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : xy \geq 0 \right\}$ olsun. W uzayı $\mathbb{R}^2$'nin bir altuzayı mıdır? Neden?

Solution: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \in W$ alalım.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$(-2)(2) \leq 0 \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \notin W$$

Dolayısıyla, W $\mathbb{R}^2$ bir altuzayı değildir.

(b) $\boxed{\text{10 puan}}$ 5-boyutlu vektör uzayı örneği veriniz ve bir bazını yazınız.

Solution: $\mathbb{R}^5$ 5 boyutlu bir uzaydır ve $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bir bazıdır.

2. (a) $\boxed{\text{15 puan}}$ T lineer dönüşümü, $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$. olmak üzere $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ile tanımlanmış olsun. T altındaki görüntüsü $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, olan bir $\mathbf{x}$ vektörü bulunuz ve bu $\mathbf{x}$ vektörünün tek olup olmadığını belirleyiniz.

Solution: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sistemini çözelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & -8 & -16 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 \text{serbest olsun.} \ \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} - 2x_3$$

$$x_1 = -2 + 5x_2 + 7x_3 = -2 + 5(\frac{1}{2} - 2x_3) + 7x_3 = \frac{1}{2} - 3x_3$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 3x_3 \\ \frac{1}{2} - 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

Denklem sisteminin tek parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır. Örneğin $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ alınabilir.

(b) $\boxed{\text{10 puan}}$ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineer bir dönüşüm ve $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 3×3 birim matrisin sütunları olmak üzere $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$, ve $T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ olsun. T'nin standart matrisini bulunuz.

Solution:

$$T = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

3. (a) $\boxed{\text{10 puan}}$ $\text{Col}A = \left\{ \begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} : r, s, t \text{ reel sayı} \right\}$ olan A matrisini belirleyiniz.

Solution:

$$\begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $\boxed{\text{15 puan}}$ $\mathcal{B} = \{1-t^2, t-t^2, 2-2t+t^2\}$ kümesi $\mathbb{P}_2$ ' nin bir bazı olsun. $\mathbf{p}(t) = 3+t-6t^2$ polunomunun $\mathcal{B}$ bazındaki koordinatlarını bulunuz.

Solution:

$$[\mathbf{p}(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3+t-6t^2 = c_1(1-t^2) + c_2(t-t^2) + c_3(2-2t+t^2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = -2, \quad c_2 - 2c_3 = 1 \Rightarrow c_2 = -3, \quad c_1 + 2c_3 = 3 \Rightarrow c_1 = 7$$

$$[\mathbf{p}(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

4. $\boxed{\text{25 puan}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

(a) A' nın sıfır uzayı için bir baz bulunuz.

Solution: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denklem sistemini çözelim.

$$x_4 - 2x_5 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = 2x_5 + 3x_6$$
$$x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = 3x_4 - x_5 = 5x_5 + 9x_6$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 + x_6 \Rightarrow x_1 = -3x_2 - 2x_4 + x_5 - x_6 = -3x_2 - 3x_5 - 7x_6$$
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 - 3x_5 - 7x_6 \\ x_2 \\ 5x_5 + 9x_6 \\ 2x_5 + 3x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_6$$

$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ sıfır uzayı için bir baz oluşturur.

(b) A' nın sütun uzayı için bir baz bulunuz.

Solution: A matrisinin pivot sütunları Col A için bir baz oluşturur. Dolayısıyla, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi Col A için bir baz oluşturur.

(c) A matrisinin sıfırlılığını ve rankını belirleyiniz.

Solution: A matrisinin sıfırlılığı dim (Nul A)=3'dür.
A matrisinin rankı dim (Col A)=3'dür.