2013–14 **MAT371 Diferansiyel Denklemler – Ödev 4** N. Course

SON TESLİM TARİHİ: Çarşamba 28 Ekim 2015 saat 11:30'e kadar.

Egzersiz 9 (Stable, unstable and semistable equilibrium solutions). [6×10p] Each of the following problems involve equations of the form $y' = f(y)$. In each problem; (i) sketch the graph of $f(y)$ versus y, (ii) find the critical (equilibrium) points of the ODE, and (iii) classify each critical point as asymptotically stable, semistable, or unstable.

[You may use a calculator or computer to help you sketch the graphs. You do not need to solve the equations, or graph solutions of them.]

(a) $\frac{dy}{dt} = ay + by^2$, $a, b > 0$, $y_0 \geq 0$.

(b) $\frac{dy}{dt} = ay + by^2$, $a, b > 0$, $-\infty < y_0 < \infty$.

(c) $\frac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)$, $y_0 \geq 0$.

(d) $\frac{dy}{dt} = y(1-y)^2$, $-\infty < y_0 < \infty$.

(e) $\frac{dy}{dt} = e^y - 1$, $-\infty < y_0 < \infty$.

(f) $\frac{dy}{dt} = e^{-y} - 1$, $-\infty < y_0 < \infty$.

Egzersiz 10. Suppose that the students of Okan Üniversitesi can be divided into two groups; those who have the flu virus and can infect others, and those who do not have it but are susceptible. Let x be the proportion of susceptible individuals and y the proportion of infectious individuals; then $x + y = 1$.

Assume that the disease spreads by contact between sick students and well students, and that the rate of spread $\frac{dy}{dt}$ is proportional to the number of such contacts. So $\frac{dy}{dt} = k_1 \times$(number of contacts). Further, assume that members of both groups move about freely among each other, so the number of contacts is proportional to the product of x and y. So (number of contacts) $= k_2 xy$. Since $x = 1 - y$, we obtain the initial value problem

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \alpha y(1-y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

where $\alpha > 0$ is a constant, and $0 \leq y_0 \leq 1$ is the initial proportion of infectious individuals.

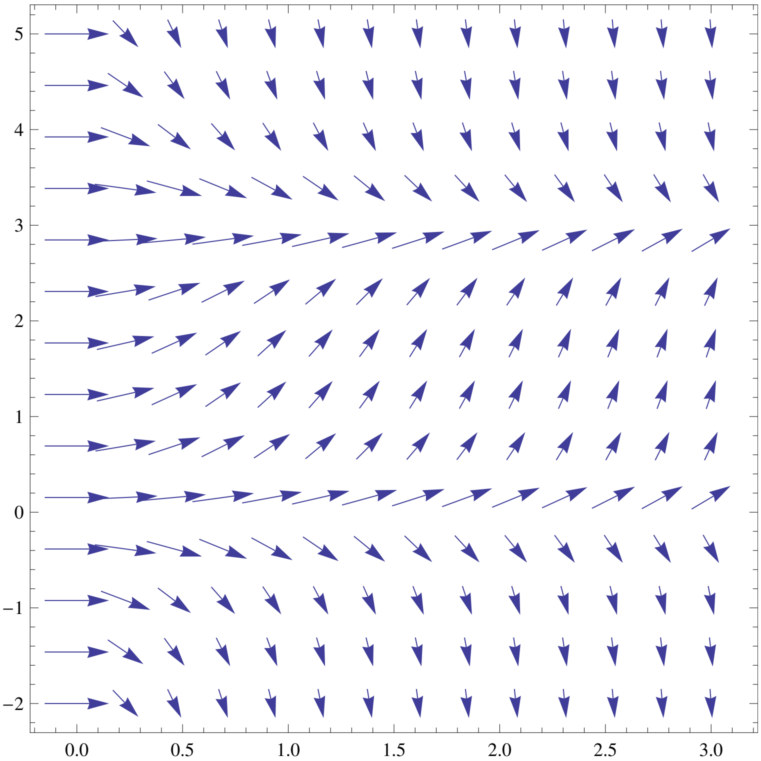
Okan Üniversitesi öğrencilerinin iki gruba ayrıldıklarını varsayın; grip virüsü taşıyan, diğer öğrencilere bulaştırabilecek olanlar ve virüsü taşımayan ancak hastalığa yakalanabilecek olanlar. Hastalığa yakalanabilecek bireylerin oranı x; hastalığı taşıyan ve bulaştırabilecek olanların oranı y'dir. Bu durumda $x + y = 1$. Hastalığın, hasta öğrencilerle sağlıklı öğrenciler arasında etkileşimle yayıldığını, ve $\frac{dy}{dt}$ olan yayılma hızının etkileşim sayısıyla orantılı olduğunu varsayın. Yani $\frac{dy}{dt} = k_1 \times$ (etkileşim sayısı). Ayrıca, her iki grubun üyelerinin birbirlerinin arasında serbestçe dolaştıklarını varsayın; böylece etkileşim sayısı x ve yenin çarpımları ile orantılıdır. Yani, (etkileş im sayısı) $= k_2 xy$. $x = 1 - y$ olduğundan, (1)'i elde ederiz. $\alpha > 0$ sabit sayıdır, $0 \leq y_0 \leq 1$ hastalık bulaştırabilecek öğrencilerin en baştaki oranıdır.

(a) [10p] Find the equilibrium points for the differential equation and determine whether each is asymptotically stable, semistable, or unstable.

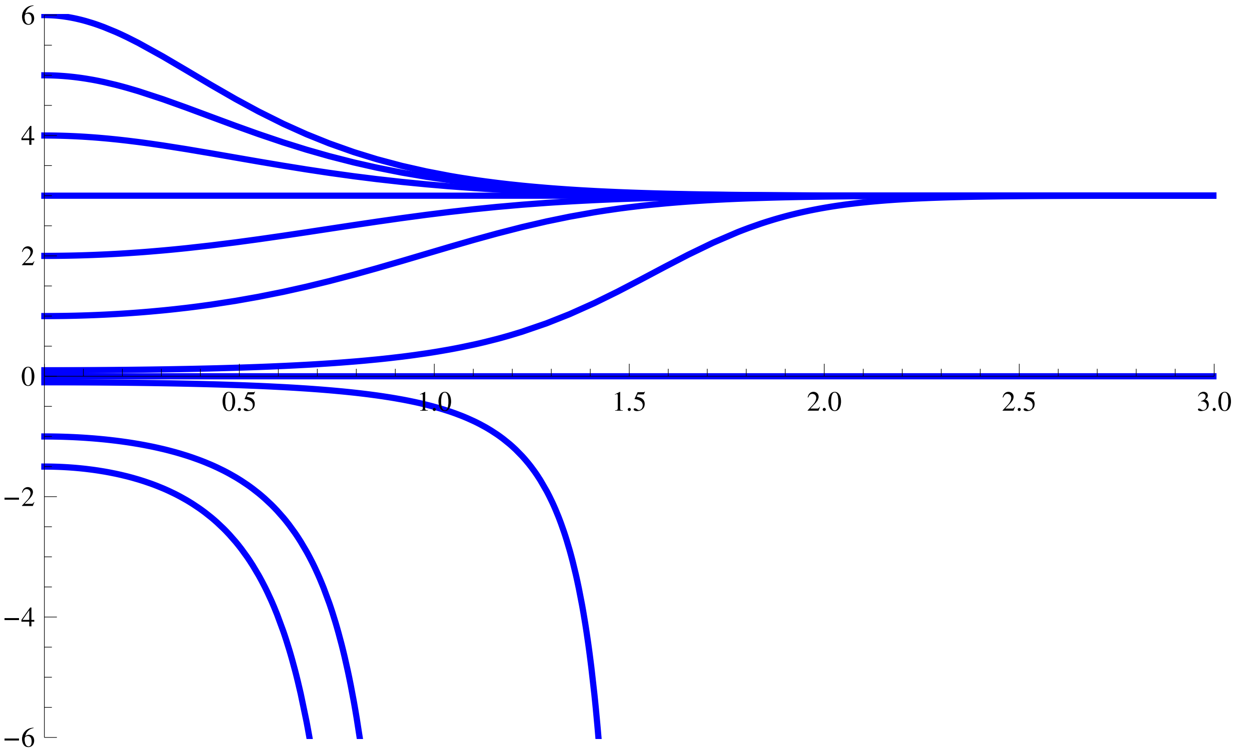
(b) [25p] Solve (1).

(c) [5p] Suppose that $y_0 > 0$. Show that $y(t) \to 1$ as $t \to \infty$, which means that ultimately all students catch the disease.

6. (a) $0 < t < 5$, (b) $\pi/2 < t < 3\pi/2$, (c) $2 < t < \infty$, (d) $-2 < t < 2$.



7. (a)



(b)

8. (a) omitted (b) $y_1(t)$ is a solution for all $t \in \mathbb{R}$; $y_2(t)$ is a solution for $t \geq 2$. (c) $\frac{\partial f}{\partial y}$ is not continuous at the point $(t, y) = (2, -1)$.