PRACTICE EXAM PRACTICE EXAM PRACTICE EXAM

T.C. OKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

04.01.2011 **MAT 371 – Differential Equations – Final Exam** N. Course

ADI SOYADI
OKUL NO
İMZA

Do not open the next page until you are told that the exam has started.

1. You will have 120 minutes to answer 4 questions from a choice of 5 . If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
2. The points awarded for each part of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the final 10 minutes of the exam.
5. Calculators, and any digital means of communication (USB sticks, mobile telephones, etc) are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
6. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. Sınav süresi toplam 120 dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan 4 tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
5. Sınav esnasında dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin (USB bellek, cep telefonu vb.) kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
6. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	TOTAL

Question 1 (Second Order Linear Differential Equations)**.** Solve

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^t \cos 2t + e^{2t}(3t+4) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

You will be given points for the following:

- [7 points] Finding the general solution of the homogeneous equation $y'' - 5y' + 6y = 0$.
- [7 points] Finding a particular solution to $y'' - 5y' + 6y = e^t \cos 2t$.
- [7 points] Finding a particular solution to $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}(3t+4)$.
- [2 points] Writing down the general solution of the nonhomogeneous differential equation.
- [2 points] Using the initial conditions to find the solution to the initial value problem.

ADI SOYADI

Question 2 (Reduction of Order)**.**

(a) [2 points] Consider

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} + y = 0, \qquad t > 0. \tag{1}$$

Show that $y_1(t) = t^{-1}$ is a solution of this differential equation.

(b) [15 points] Using the method of reduction of order, find a second solution $y_2(t)$ of (1).

(c) [4 points] Show that y_1 and y_2 are linearly independent.

(d) [4 points] Solve

$$\begin{cases} t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} + y = 0, \qquad t > 0 \\ y(1) = \sqrt{3} \\ y'(1) = 1 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

ADI SOYADI

Question 3 (Exact First Order Differential Equations)**.** Consider

$$\left(\frac{2x+3}{y}\right)+\left(2-\frac{2}{y}\right)\frac{dy}{dx}=0 \tag{2}$$

This equation is of the form $M(x,y)+N(x,y)y'=0$.

(a) [2 points] Is this equation exact?

(b) [3 points] Calculate $\frac{M_y-N_x}{N}$ and $\frac{N_x-M_y}{M}$.

(c) [8 points] If $\left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)$ is a function only of x, then find an integrating factor $\mu(x)$ that solves

$$\frac{d\mu}{dx}(x)=\left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)\mu(x);$$

OR if $\left(\frac{N_x-M_y}{M}\right)$ is a function only of y, then find an integrating factor $\mu(y)$ that solves

$$\frac{d\mu}{dy}(y)=\left(\frac{N_x-M_y}{M}\right)\mu(y).$$

(d) [2 points] Multiply equation (2) by the integrating factor that you found in part (c). Is the equation now exact?

(e) [8 points] Solve the equation that you wrote in part (d).

(f) [2 points] Now solve

$$\begin{cases} \left(\frac{2x+3}{y}\right) + \left(2 - \frac{2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

ADI SOYADI

Question 4 (Systems of Equations)**.**

(a) [10 points] Solve

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) [2 points] How does the solution behave as $t \to \infty$?

(c) [11 points] Solve

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) [2 points] How does the solution behave as $t \to \infty$?

ADI SOYADI

Question 5 (Variation of Parameters)**.**
Consider the following method of solving the general linear equation of first order:

$$y' + p(t)y = g(t). \tag{3}$$

(a) [5 points] If $g(t) \equiv 0$, show that the solution is

$$y(t) = A \exp\left[-\int p(t)dt\right],$$

where A is a constant.

(b) [10 points] If $g(t)$ is not identically zero, assume that the solution is of the form

$$y(t) = A(t) \exp\left[-\int p(t)dt\right], \tag{4}$$

where A is now a function of t. By substituting for y in equation (3), show that $A(t)$ must satisfy the condition

$$A'(t) = g(t) \exp\left[+\int p(t)dt\right]. \tag{5}$$

(c) [10 points] Using (4) and (5) show that the solution to (3) is

$$y(t) = \frac{\int \mu(s)g(s)ds + c}{\mu(t)}$$

where

$$\mu(t) = \exp\left[\int p(t)dt\right].$$