



T.C. OKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

02.11.2010

MAT 371 – Differential Equations – Mid-Term Exam

N. Course

ADI SOYADI
OKUL NO
İMZA

Do not open the next page until you are told that the exam has started.

1. You will have 60 minutes to answer 2 questions from a choice of 3 . If you choose to answer more than 2 questions, then only your best 2 answers will be counted.
2. The points awarded for each part of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the final 10 minutes of the exam.
5. Calculators, and any digital means of communication (USB sticks, mobile telephones, etc) are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
6. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. Sınav süresi toplam 60 dakikadır. Sınavda 3 soru sorulmuştur. Bu sorulardan 2 tanesini seçerek cevaplayınız. 2'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 2 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
5. Sınav esnasında dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin (USB bellek, cep telefonu vb.) kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
6. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	TOTAL

Question 1 (Linear Equations).
Consider the initial value problem

$$\begin{cases} 2\frac{dy}{dt} - y = e^{t/3}, \\ y(0) = a. \end{cases} \quad (1)$$

(a) [10 points] Draw a direction field for this differential equation.

(b) [5 points] How do solutions appear to behave as $t \rightarrow \infty$? Does the behavior depend on the choice of the initial value a ?

(c) [2 points] Let a_0 be the value of a for which the transition from one type of behavior to another occurs. In other words; if $a > a_0$ then y behaves one way, but if $a < a_0$ then y behaves a different way.

Estimate the value of a_0 .

(d) [20 points] Solve the initial value problem

$$\begin{cases} 2\frac{dy}{dt} - y = e^{t/3}, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

(e) [8 points] Find the critical value a_0 exactly.

(f) [5 points] Describe the behavior of the solution with initial value $y(0) = a_0$.

Question 2 (Separable Equations). Consider the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}. \quad (2)$$

(a) [5 points] Show that this differential equation can be rewritten as

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}. \quad (3)$$

(b) [5 points] Let $v(x)$ be a new variable such that $v = y/x$ or $y(x) = xv(x)$. Differentiate $y = xv$ to find $\frac{dy}{dx}$ in terms of x , v , and $\frac{dv}{dx}$.

(c) [10 points] Replace y and $\frac{dy}{dx}$ in (3) by $y = xv$ and your answer to (b). Show that

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v^2}{2v}$$

and

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v}.$$

(d) [20 points] The equation

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v}$$

is a separable differential equation. Solve this equation.

[HINT: $\int \frac{2t}{1+t^2} dt = \log(1 + t^2) + \text{constant}$.]

(e) [10 points] Using your answer to (d), show that the solutions of (2) are given by

$$x^2 + y^2 - cx^3 = 0$$

where c is a constant.

Question 3 (Autonomous Equations). Consider the initial value problem

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 4y - y^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

where $-\infty < y_0 < \infty$.

(a) [5 points] Find the three critical points of the differential equation.

(b) [12 points] Sketch the graph of $f(y)$ versus y [here $f(y) = 4y - y^3$].

(c) [6 points] Determine whether each critical point is asymptotically stable, unstable or semistable.

- (d) [12 points] Determine where the graph of y versus t is concave up and where it is concave down. [Hint: First find the points where $f'(y) = 0$]

- (e) [15 points] Sketch some solutions of the initial value problem for $t > 0$. [You should sketch all three equilibrium solutions as well as solutions for the cases: $y_0 < -2$, $-2 < y_0 < -1$, $-1 < y_0 < 0$, $0 < y_0 < 1$, $1 < y_0 < 2$ and $y_0 > 2$.]