



OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK-MİMARLIK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2015.01.08

MAT371 Diferansiyel Denklemler – Final Sınavı

N. Course



ADI: Ö R N E K T İ R

SOYADI: S A M P L E

ÖĞRENCİ NO:

İMZA:

Süre: 120 dk.
Sınav sorularından 4
tanmesini seçerek
cevaplayınız.

 **Do not open the exam until you are told that you may begin.**  **Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.**

- You will have **120** minutes to answer **4** questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
- The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
- All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
- You must show your working for all questions.
- Write your student number on every page.
- This exam contains 12 pages. Check to see if any pages are missing.
- If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
- Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
- All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
- Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.
- Sınav süresi toplam **120** dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **4** tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığımız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
- Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
- Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
- Sonuca ulaşmak için yaptığımız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
- Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
- Sınav 12 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
- Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmamız yasaktır.
- Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
- Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
- Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	TOPLAM
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
25	25	25	25	25	100

Formula Page

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta &= \operatorname{cosec}^2 \theta \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 0 &= \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 0 &= \sin 0^\circ = 0 \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} &= \cos 90^\circ = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} &= \sin 90^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (uv)' &= uv' + u'v \\ \left(\frac{u}{v} \right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ (f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ \int u \, dv &= uv - \int v \, du \\ \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\int \tan x \, dx = \log |\sec x| + C$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + C$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\log |\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} \frac{x}{a} = \frac{a}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x}$$

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

Soru 1 (Petrol Tank / Benzin Deposu)*English*

In an oil refinery, a storage tank contains 8000 litres of petrol¹ that initially contains 50kg of an additive dissolved in it.

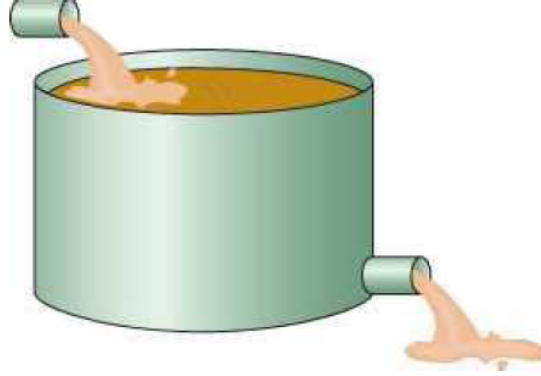
In preparation for winter weather, petrol containing 0.25 kg/litre of the additive is pumped into the tank at a rate of 160 litres/minute.

The well-mixed solution is pumped out at a rate of 180 litres/minute.

Türkçe

Bir petrol rafinerisindeki bir depoda, başlangıçta içinde 50kg katkı maddesi çözülmüş olan 8000 litre benzin bulunmaktadır.

Kış şartlarına hazırlık olarak, içinde 0.25kg/litre katkı maddesi olan benzin 160 litre/dakika hızla depoya pompalanmaktadır. İyiye karışmış olan karışım 180 litre/dakika hızla depodan dışarı pompalanmaktadır.



- (a) [15p] Write an initial value problem (IVP) for the amount of additive in the tank at time t .
(You must explain why your differential equation is valid.)
- (b) [9p] Solve the IVP that you wrote in part (a).
[HINT: Use the integrating factor $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$.]
- (c) [1p] How much additive is in the tank after 400 minutes?
- (a) [15p] Depodaki katkı maddesi miktarı için (t zamanda) bir başlangıç değer problemi (IVP) yazınız.
(Diferansiyel denkleminizin neden geçerli olduğunu açıklamalısınız.)
- (b) [9p] (a) bölümünde yazmış olduğunuz IVP'yi çözünüz.
- (c) [1p] 400 dakika sonra depoda ne kadar katkı maddesi bulunmaktadır?

¹or "gasoline" in American English



Soru 2 (Second Order Linear Differential Equations) [25p] Solve

$$25y'' - 20y' + 4y = t + 841 \cos t - 7e^{2t}. \quad (1)$$

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

$$25y'' - 20y' + 4y = t + 841 \cos t - 7e^{2t}. \quad (1)$$

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

Soru 3 (Reduction of Order) Consider

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad x > 0. \quad (2)$$

(a) [2p] Show that $y_1(x) = x^{-1}$ is a solution of (2).

(b) [17p] Using the method of reduction of order, find a second solution $y_2(x)$ of (2).

[HINT: Start with $y_2(x) = v(x)y_1(x)$.]

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

$$y_1(x) = x^{-1}$$

$$y_2(x) =$$

(c) [2p] Check that **your** $y_2(x)$ is a solution of (2).

(d) [4p] Show that $y_1(x) = x^{-1}$ and **your** y_2 are linearly independent.

**Soru 4 (Systems of Equations)**

(a) [13p] Solve

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ÖRNEKTİR

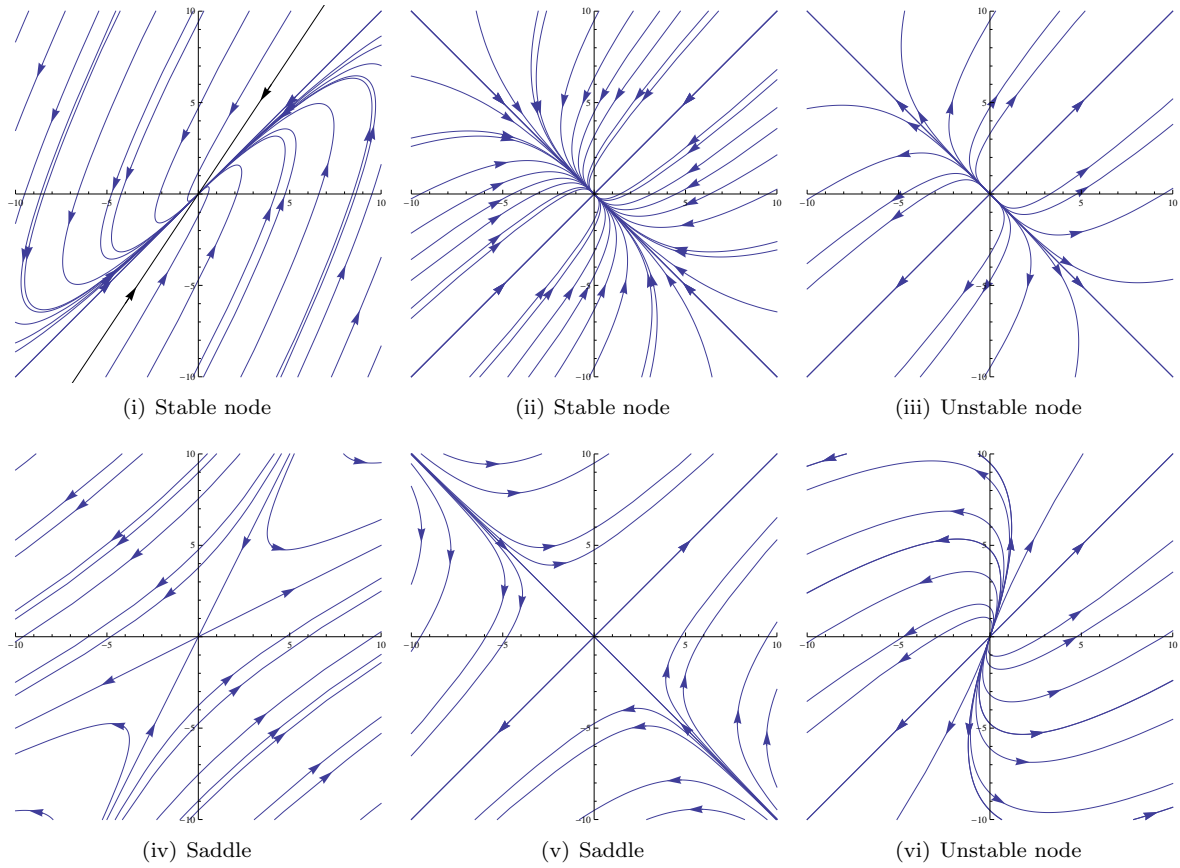
ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR



Let $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. The determinant of A is -16 and the trace of A is 6 . The eigenvalues of A are $r_1 = 8$ and $r_2 = -2$. The corresponding eigenvectors of A are $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectively.

(b) [2p] Which of the graphs (above) is the phase plot of the equation $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$?

[Mark one box only.]

- (i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

(c) [10p] Justify (explain) your answer to part (b).

Soru 5 (Bernoulli Differential Equation) Consider the differential equation

$$\frac{dy}{dt} - y = -y^2. \quad (3)$$

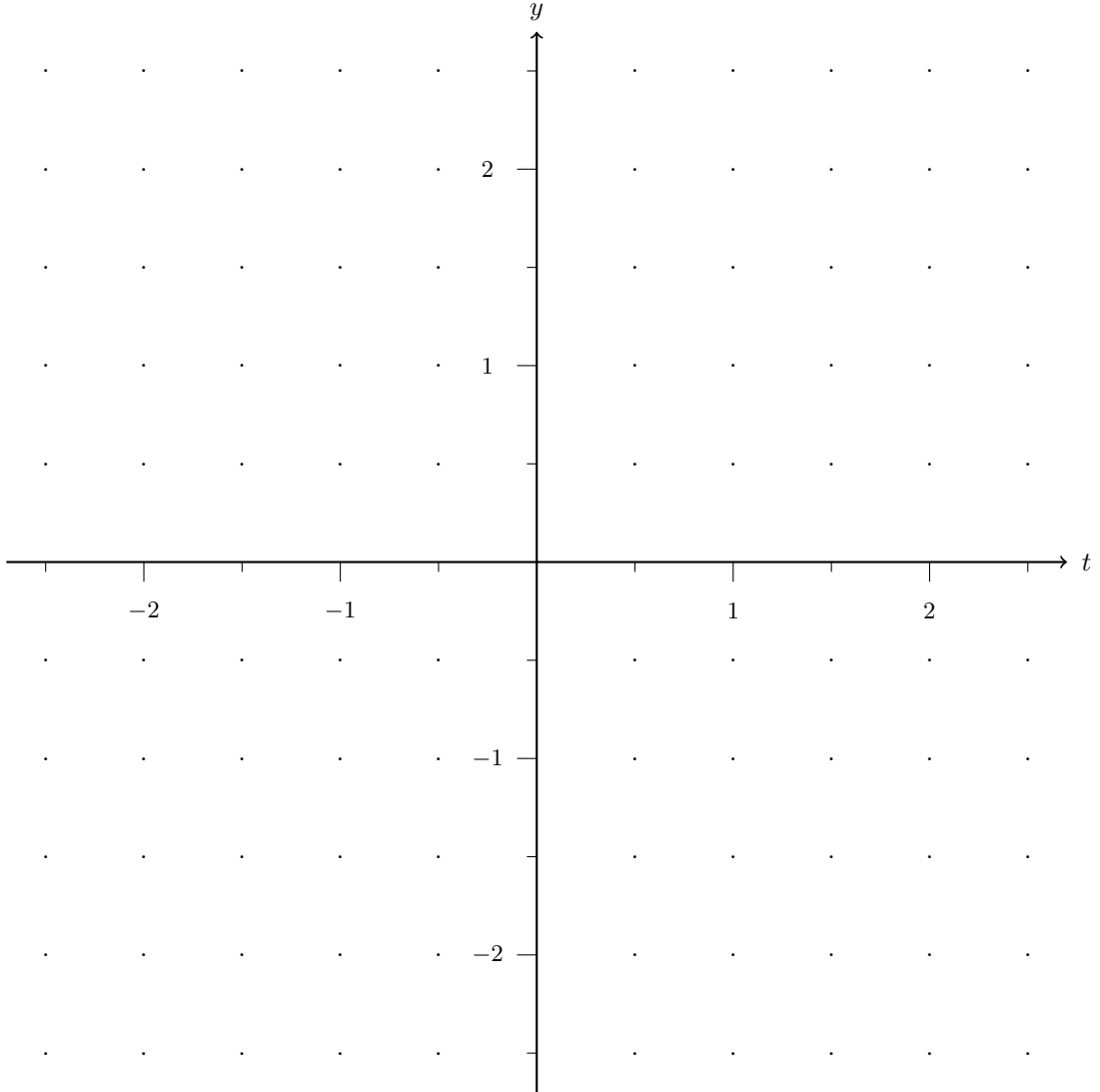
(a) [1p] What is the order of (3)?

5th order 2nd order 3rd order 1st order 99th order

(b) [1p] Is (3) linear or non-linear?

linear non-linear

(c) [10p] Draw a direction field for (3).



$$\frac{dy}{dt} - y = -y^2 \quad (3)$$

Define $u(t) = \frac{1}{y(t)}$.

(d) [5p] Show that

$$\frac{du}{dt} + u = 1 \quad (4)$$

(e) [5p] Solve (4).

(f) [3p] Now solve

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - y = -y^2, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR

ÖRNEKTİR