OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK-MİMARLIK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2016.01.05 **MAT371 Diferansiyel Denklemler – Final Sınavı** N. Course

ADI: ÖRNEKTİR
SOYADI: SAMPLE
ÖĞRENCİ NO:
İMZA:

Süre: **120** dk.

Sınav sorularından **4** tanesini seçerek cevaplayınız.

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have **120** minutes to answer **4** questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You must show your working for all questions.
5. Write your student number on every page.
6. This exam contains 12 pages. Check to see if any pages are missing.
7. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
8. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
9. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
10. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam **120** dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **4** tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
5. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
6. Sınav 12 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
7. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
8. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
9. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
10. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	TOPLAM
25	25	25	25	25	100

Formula Page

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$
$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$\cos 0 = \cos 0^\circ = 1$$
$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0$$
$$\cos\tfrac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\tfrac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\tfrac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}$$
$$\sin\tfrac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\tfrac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$$
$$\sin\tfrac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$$

$$(uv)' = uv' + u'v$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$
$$\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + C$$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$$
$$\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C$$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$$
$$\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C$$

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x\cot x$$
$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\log|\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\tfrac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\tfrac{x}{a} = \frac{a}{a^2+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}\tfrac{x}{a} = \frac{a}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}$$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}$$

Soru 1 (Carbon monoxide pollution)

English

The conference room, in the Engineering and Architecture Faculty, contains 4500 litres of air. Initially this air is free of carbon monoxide (CO).

Starting at time $t = 0$, cigarette smoke containing 4% carbon monoxide is blown into the room at the rate of 0.3 litres/minute.

A ceiling fan keeps the air in the room well circulated and the air leaves the room at the same rate of 0.3 litres/minute.

(a) [18p] Write an initial value problem (IVP) for the amount of carbon monoxide in the conference room at time t.
(You must explain why your differential equation is valid.)

(b) [7p] Approximately what percentage, of the air in the conference room, will be carbon monoxide after one year (assuming that nothing changes in this year, the door isn't opened, etc.)?

Türkçe

Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi'ndeki konferans salonu 4500 litre hava barındırmaktadır. Başlangıçta bu havada hiç karbon monoksit (CO) bulunmamaktadır.

t = 0 zamanından başlayarak, %4 karbon monoksit ihtiva eden sigara dumanı, odaya 0.3 litre/dakika oranında üflenmektedir.

Bir tavan vantilatörü odadaki havayı eşit olarak dağıtmaktadır ve odadan 0.3 litre/dakika oranında hava çıkmaktadır.

(a) [18p] Konferans salonundaki karbon monoksit miktarı için (t zamanda) bir başlangıç değer problemi (IVP) yazınız.
(Diferansiyel denkleminizin neden geçerli olduğunu açıklamalısınız.)

(b) [7p] Bir yılın sonunda bu konferans salonundaki havanın yaklaşık yüzde kaçı karbon monoksit olacaktır (bu bir yıl içinde hiç bir değişiklik olmadığını, örneğin kapının açılmadığını, vs. varsayarak)?

Soru 2 (Second Order Linear Differential Equations) [25p] Solve

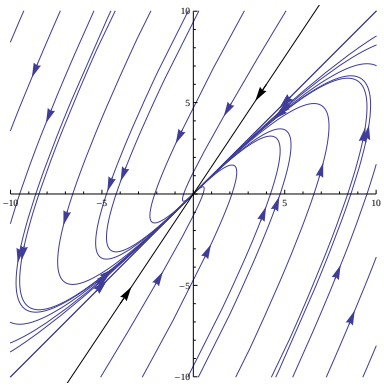
$$2y'' + 8y' + 8y = 8 + 250t\cos t. \tag{1}$$

$$2y'' + 8y' + 8y = 8 + 250t\cos t. \qquad (1)$$

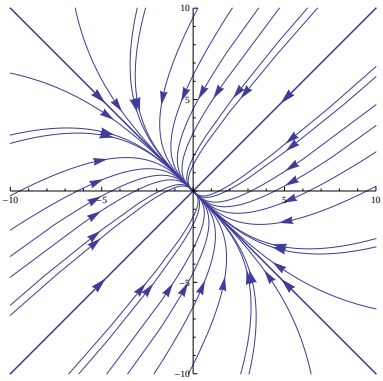
Soru 3 (Systems of Equations)

(a) [13p] Solve

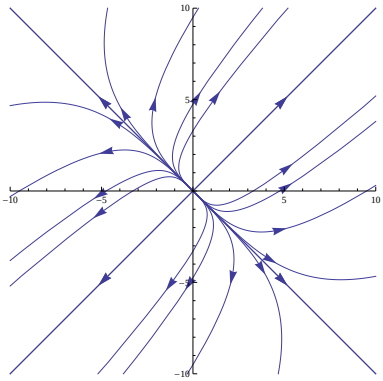
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



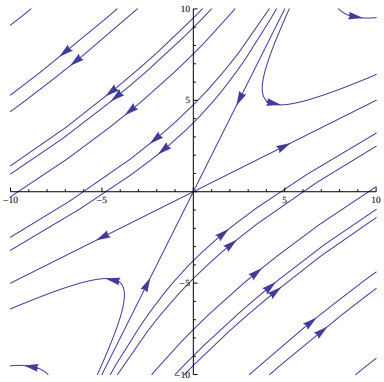
(i) Stable node



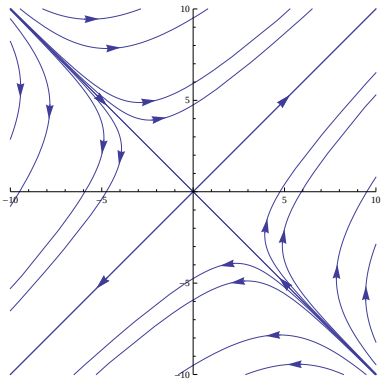
(ii) Stable node



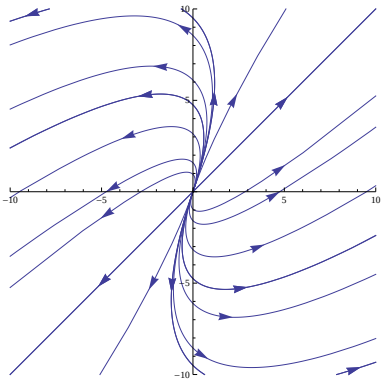
(iii) Unstable node



(iv) Saddle



(v) Saddle



(vi) Unstable node

Let $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. The determinant of A is 3 and the trace of A is -4. The eigenvalues of A are $r_1 = -3$ and $r_2 = -1$. The corresponding eigenvectors of A are $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectively. A is a symmetric invertible 2×2 matrix.

(b) [2p] Which of the graphs (above) is the phase plot of the equation $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$?

[Mark ☑ one box only.]

☐ (i) ☐ (ii) ☐ (iii) ☐ (iv) ☐ (v) ☐ (vi)

(c) [10p] Justify (explain) your answer to part (b).

Soru 4 (First Order Exact Equations) Consider

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{\cosh(xy)}{x^2} + \frac{y}{x}\sinh(xy)\right) + \sinh(xy)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

This equation is of the form $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$.

(a) [2p] Is this equation exact?

(b) [2p] Calculate $\frac{M_y - N_x}{N}$.

$$\frac{M_y - N_x}{N} =$$

(c) [6p] Find an integrating factor $\mu(x)$ that solves

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \mu(x) \cdot \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{\cosh(xy)}{x^2}+\frac{y}{x}\sinh(xy)\right)+\sinh(xy)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (2)$$

(d) [1p] Multiply (2) by the integrating factor that you found in part (c).

(3)

(e) [2p] Show that (3) is exact?

[HINT: Equation (3) is your answer to part (d). If (3) is not exact, then your answer to part (c) is probably wrong.]

(f) [12p] Solve (3).

Soru 5 (Second Order Exact Equations) The second order ordinary differential equation

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{4}$$

is said to be *exact* if and only if it can be written in the form

$$\big(P(x)y'\big)' + \big(f(x)y\big)' = 0 \tag{5}$$

for some function $f(x)$. Equation (5) can be integrated once immediately, resulting in a first order linear equation for y which you know how to solve.

(a) [20p] Show that

$$(4) \text{ is exact} \qquad \Longleftrightarrow \qquad P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$$

[HINT: Start with $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = \big(P(x)y'\big)' + \big(f(x)y\big)'$. Equation (4) is exact iff this is true. Don't forget to prove both " $\Longleftarrow$ " and " $\Longrightarrow$ ".]

(b) [5p] Show that

$$y'' + xy' + y = 0$$

is exact.