OKAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK-MİMARLIK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK TEMEL BİLİMLERİ BÖLÜMÜ

2016.05.18 **MAT372 K.T.D.D. – Final Sınavı** N. Course

Adı:	ÖRNEKTİR
Soyadı:	SAMPLE
Öğrenci No:	01060
İmza:	

Süre: **120** dk.

Sınav sorularından **4** tanesini seçerek cevaplayınız.

Do not open the exam until you are told that you may begin.
Sınavın başladığı yüksek sesle söylenene kadar sayfayı çevirmeyin.

1. You will have **120** minutes to answer **4** questions from a choice of 5. If you choose to answer more than 4 questions, then only your best 4 answers will be counted.
2. The points awarded for each part, of each question, are stated next to it.
3. All of the questions are in English. You may answer in English or in Turkish.
4. You must show your working for all questions.
5. Write your student number on every page.
6. This exam contains 12 pages. Check to see if any pages are missing.
7. If you wish to leave before the end of the exam, give your exam script to an invigilator and leave the room quietly. You may not leave in the first 20 minutes, or in the final 10 minutes, of the exam.
8. Calculators, mobile phones and any digital means of communication are forbidden. The sharing of pens, erasers or any other item between students is forbidden.
9. All bags, coats, books, notes, etc. must be placed away from your desks and away from the seats next to you. You may not access these during the exam. Take out everything that you will need before the exam starts.
10. Any student found cheating or attempting to cheat will receive a mark of zero (0), and will be investigated according to the regulations of Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği.

1. Sınav süresi toplam **120** dakikadır. Sınavda 5 soru sorulmuştur. Bu sorulardan **4** tanesini seçerek cevaplayınız. 4'den fazla soruyu cevaplarsanız, en yüksek puanı aldığınız 4 sorunun cevapları geçerli olacaktır.
2. Soruların her bölümünün kaç puan olduğu yanlarında belirtilmiştir.
3. Tüm sorular İngilizce'dir. Cevaplarınızı İngilizce yada Türkçe verebilirsiniz.
4. Sonuca ulaşmak için yaptığınız işlemleri ayrıntılarıyla gösteriniz.
5. Öğrenci numaranızı her sayfaya yazınız.
6. Sınav 12 sayfadan oluşmaktadır. Lütfen eksik sayfa olup olmadığını kontrol edin.
7. Sınav süresi sona ermeden sınavınızı teslim edip çıkmak isterseniz, sınav kağıdınızı gözetmenlerden birine veriniz ve sınav salonundan sessizce çıkınız. Sınavın ilk 20 dakikası ve son 10 dakikası içinde sınav salonundan çıkmanız yasaktır.
8. Sınav esnasında hesap makinesi, cep telefonu ve dijital bilgi alışverişi yapılan her türlü malzemelerin kullanımı ile diğer silgi, kalem, vb. alışverişlerin yapılması kesinlikle yasaktır.
9. Çanta, palto, kitap ve ders notlarınız gibi eşyalarınız sıraların üzerinden ve yanınızdaki sandalyeden kaldırılmalıdır. Sınav süresince bu tür eşyaları kullanmanız yasaktır, bu nedenle ihtiyacınız olacak herşeyi sınav başlamadan yanınıza alınız.
10. Her türlü sınav, ve diğer çalışmada, kopya çeken veya kopya çekme girişiminde bulunan bir öğrenci, o sınav ya da çalışmadan sıfır (0) not almış sayılır, ve o öğrenci hakkında Yükseköğretim Kurumları Öğrenci Disiplin Yönetmeliği hükümleri uyarınca disiplin kovuşturması yapılır.

1	2	3	4	5	Toplam
25	25	25	25	25	100

Canonical Forms:

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$$

$$\begin{aligned}
A^* &= A\xi_x^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2\\
B^* &= 2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y\\
C^* &= A\eta_x^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2\\
D^* &= A\xi_{xx}+B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y\\
E^* &= A\eta_{xx}+B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y\\
F^* &= F\\
G^* &= G\\
H^* &= -D^*u_\xi-E^*u_\eta-F^*u+G^*\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}
\end{aligned}$$

Fourier Transforms:

$$F(\omega)=\mathcal{F}\big[f\big](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\big[F\big](x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

$f(x)$	$F(\omega)$
$u_t(x,t)$	$U_t(\omega,t)$
$u_x(x,t)$	$i\omega U(\omega,t)$
$u_{xx}(x,t)$	$-\omega^2U(\omega,t)$
$e^{-\alpha x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\omega}}$
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi$	$F(\omega)G(\omega)$
$\delta(x-x_0)$	$\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega x_0}$
$f(x-\beta)$	$e^{-i\omega\beta}F(\omega)$
$xf(x)$	$iF_\omega(\omega)$
$\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$	$e^{-\lvert\omega\rvert\alpha}$
$f(x)=\begin{cases}0 & \lvert x\rvert>a\\ 1 & \lvert x\rvert<a\end{cases}$	$\frac{\sin a\omega}{\pi\omega}$

Famous PDEs:

$u_t=ku_{xx}$	heat equation
$u_{tt}-c^2u_{xx}=0$	wave equation
$\nabla^2u=0$	Laplace's Equation

Fourier Series:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{L}x+b_k\sin\frac{k\pi}{L}x$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx$$

$$a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{k\pi}{L}x\,dx$$

$$b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx$$

If $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$ then

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}-\left(\frac{n\pi}{L}\right)a_n\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

If $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ then

$$f'(x)=\frac{1}{L}\Big[f(L)-f(0)\Big]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n\pi}{L}b_n+\frac{2}{L}\Big((-1)^nf(L)-f(0)\Big)\right]\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

ODEs:

The solution of $\phi'=\mu\phi$ is

$$\phi(x)=Ae^{\mu x}.$$

The solution of $\phi''=\mu^2\phi$ is

$$\begin{aligned}\phi(x)&=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x}\\&=C\cosh\mu x+D\sinh\mu x.\end{aligned}$$

The solution of $\phi''=-\mu^2\phi$ is

$$\phi(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x.$$

The solution of $x(x\phi')'-\mu^2\phi=0$ $(\mu\neq 0)$ is

$$\phi(x)=Ax^{-\mu}+Bx^{\mu}.$$

The solution of $x(x\phi')'=0$ is

$$\phi(x)=A\log x+B.$$

Soru 1 (Fourier Transforms)

(a) [1p] Please write your student number on every page.

(b) [5p] Give the definition of the *convolution* of two functions.

The Convolution Theorem Let f and g be continuous functions. Let $F(\omega)$ and $G(\omega)$ denote the Fourier transforms of f and g respectively. Then

$$\mathcal{F}\big[f * g\big](\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

(c) [19p] Prove the Convolution Theorem.

Soru 2 (Separation of Variables)

[25p] Explain the method of *Separation of Variables* for partial differential equations.

Imagine that you are explaining the method of *Separation of Variables* to someone who hasn't studied this course. How would you explain it? This question should take you ≈ 25 minutes.

You might like to include:

- the main concepts of this method;
- an explaination of the *separation constant*
- an explaination of *eigenvalues* and *eigenfunctions*;
- an example of your choosing.

[25p] *Değişkenleri Ayırma Yöntemi*ni kısmi türevli diferansiyel denklemleri için açıklayınız.

Bu dersi almamış birisine *Değişkenleri Ayırma Yöntemi*ni anlatmanız gerektiğini varsayalım. Bu yöntemi nasıl anlatırdınız? Bu soruyu cevaplamak yaklaşık 25 dakikanızı alacaktır.

Bu soruyu cevaplarken aşağıdaki noktalara da yer veriniz:

- bu yöntemin temel kavramları;
- *ayırma sabitinin* açıklaması;
- *özdeğer* ve *özişlev*'in açıklamaları;
- sizin seçeğiniz bir örnek.

Soru 3 (Characteristics) Consider the PDE

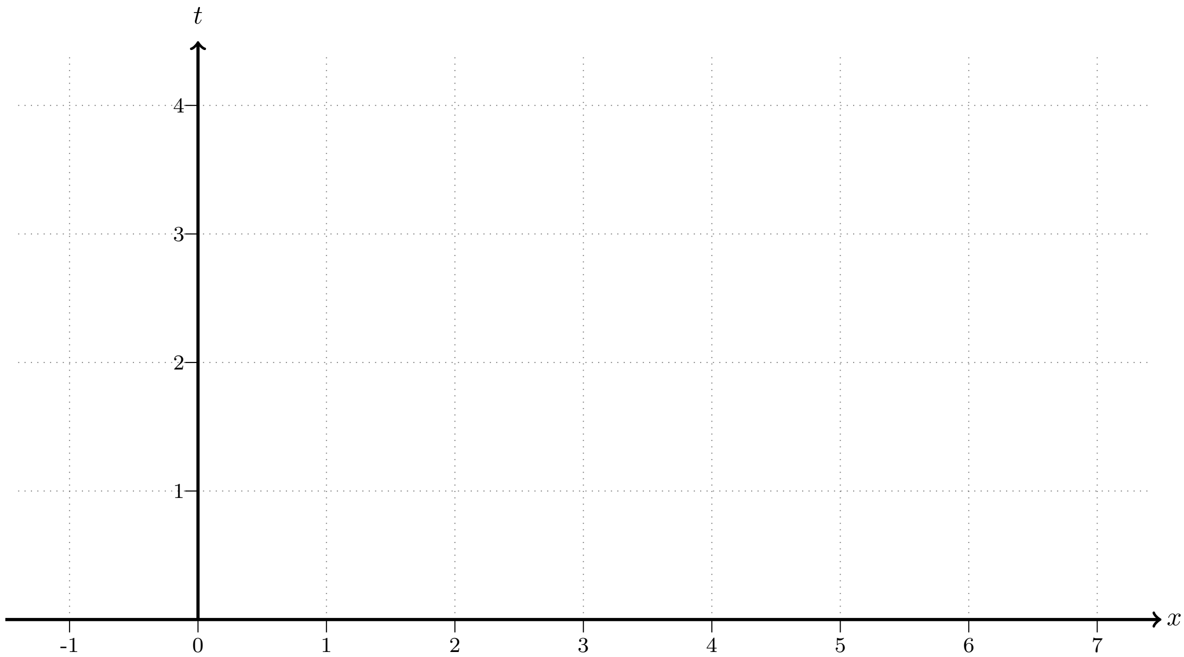
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{3}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

with the initial condition

$$u(x,0) = \begin{cases} 3 & x < 2 \\ 1 & x > 2. \end{cases} \tag{2}$$

(a) [2p] Replace (1) by a system of 2 ODEs.

(b) [7p] Plot the characteristics (t against x) for this problem.



(c) [1p] Does this problem have *fan-like characteristics*, *shock wave characteristics*, *neither* or *both*? [Mark ☑ only one box.]

☐ fan-like characteristics, ☐ shock wave characteristics, ☐ neither, ☐ both.

(d) [9p] Solve

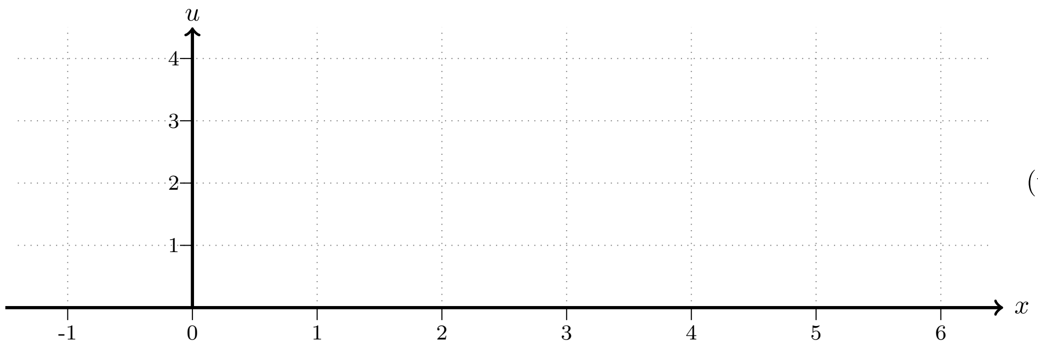
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{3}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

subject to

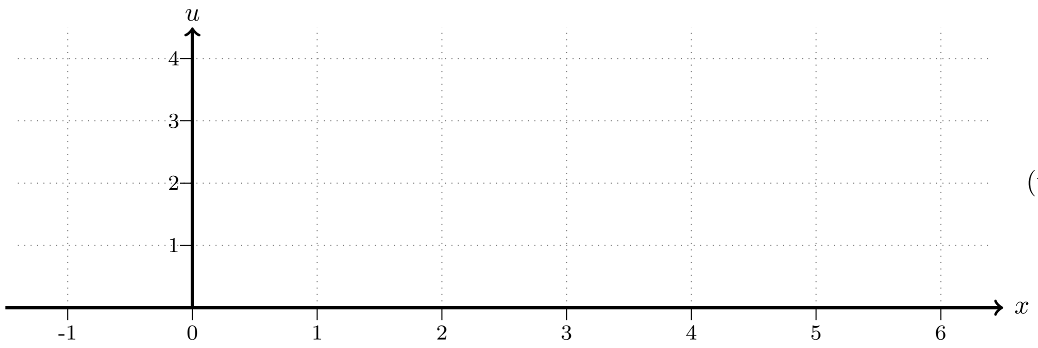
$$u(x,0) = \begin{cases} 3 & x < 2 \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} & \\ & \end{cases}}$$

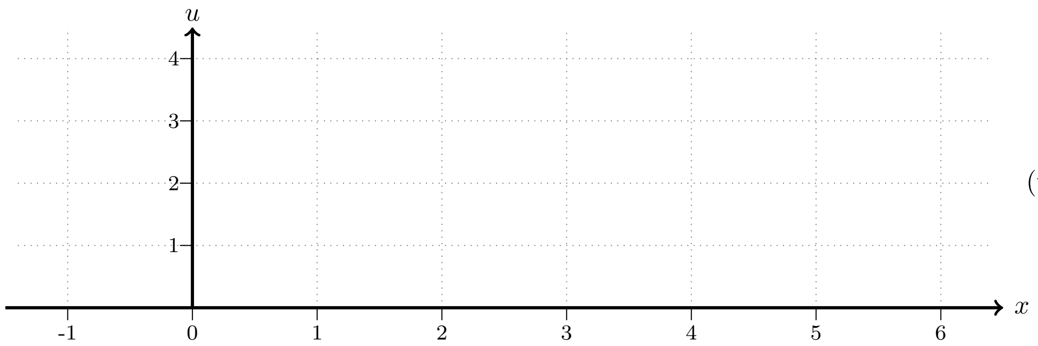
(e) [3×2p] Sketch the graph (u against x) of the solution at times $t = 0$, $t = 1$ and $t = 2$.



($t = 0$)



($t = 1$)



($t = 2$)

Soru 4 (Canonical Forms) Consider the second order partial differential equation

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = y^2 \tag{3}$$

for $y \neq 0$.

(a) [1p] Calculate the discriminant $\Delta(x, y)$ of (3).

(b) [2p] If $y \neq 0$, equation (3) is a/an

☐ hyperbolic PDE; ☐ parabolic PDE; ☐ elliptic PDE.

(c) [2p] Find the characteristic equation of (3).

(d) [5p] Find the characteristic curve(s) of (3).

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = y^2 \qquad (y \neq 0) \tag{3}$$

(e) [15p] Find a canonical form for (3).
[HINT: x and y MUST NOT appear in your final answer. I want to only see u, ξ, η; or only see u, α, β.]

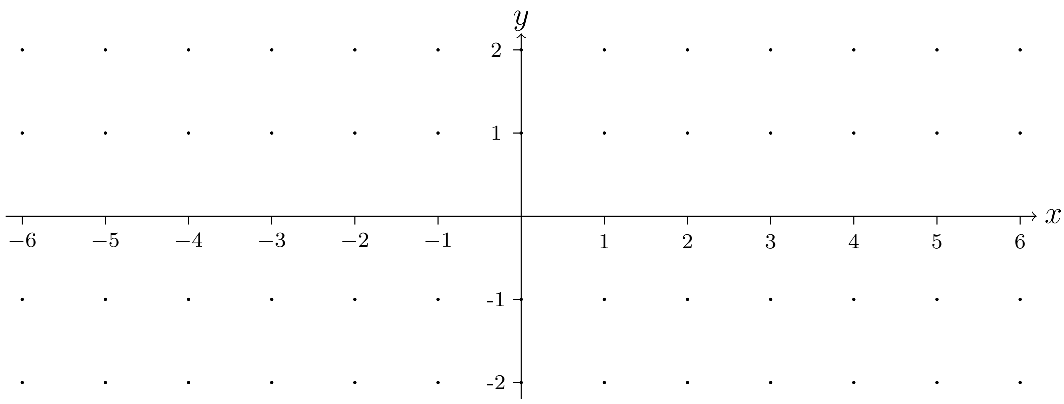
Soru 5 (Fourier Series)

(a) [5p] Let $n, m \in \mathbb{N}$ such that $n \neq m$. Show that the functions $\sin \frac{n\pi x}{2}$ and $\cos \frac{m\pi x}{2}$ are orthogonal on $[-2, 2]$.

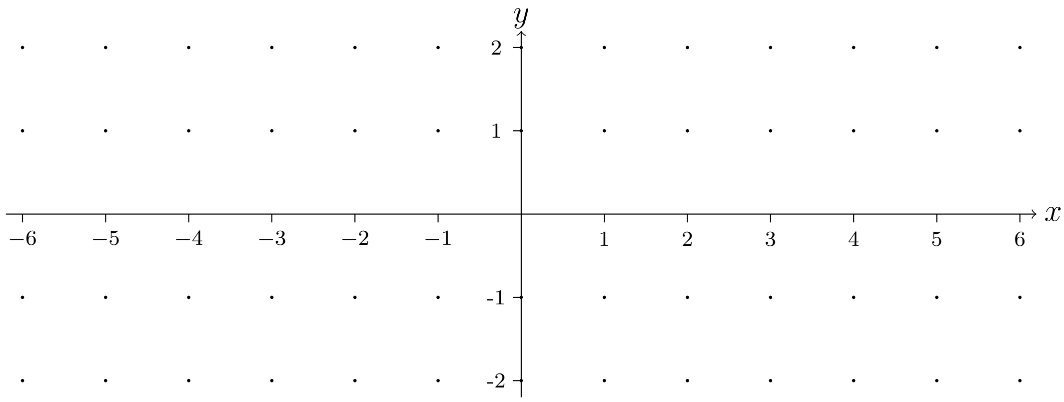
Define the function $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x = -2,\ x = 2, \\ \frac{x}{2} + 1 & -2 < x \leq 0 \\ x & 0 < x < 2. \end{cases} \tag{4}$$

(b) [1p] Sketch f.



(c) [6p] Sketch the Fourier Series of f.



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x = -2,\ x = 2, \\ \frac{x}{2} + 1 & -2 < x \leq 0 \\ x & 0 < x < 2. \end{cases} \tag{5}$$

(d) [13p] Calculate the coefficients $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ of the Fourier Series of f on $[-2, 2]$. [You do not need to calculate $b_k = -\frac{1}{k\pi}\left(1 + (-1)^k \times 2\right)$.]